

Devoir maison n° 5

A rendre le jeudi 16 octobre 2025

On note \mathcal{P} le plan complexe. On considère l'application f définie sur \mathbb{C} par

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z(1 - z) \end{cases} .$$

On note $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point $F(M)$ d'affixe $f(z)$.

1. Quels sont les points fixes de F (c'est-à-dire les points $M \in \mathcal{P}$ tels que $F(M) = M$) ?
2. Quels sont les points ayant pour image par F le point A d'affixe -4 ?
3. Quels sont les points ayant pour image par F le point B d'affixe $2 + 2i$?
4. Soient M_1 et M_2 deux points distincts d'affixes respectives z_1 et z_2 . Donner une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $F(M_1) = F(M_2)$.
Interpréter géométriquement cette condition en termes du milieu du segment $[M_1M_2]$.
5. Étudier l'injectivité de l'application F .
6. Démontrer que F est surjective.
7. Déterminer les points $M \in \mathcal{P}$ ayant exactement un antécédent par F .
8. Soit $\theta \in [0, \pi]$. Calculer le module et un argument de $f(e^{i\theta})$.