

Correction du Test n° 4

Sujet A

Exercice 1 Étudier la fonction $f : x \mapsto (\sqrt{x})^x = e^{x \ln(\sqrt{x})} = e^{\frac{x}{2} \ln x}$

$$D_f = \mathbb{R}_+^* = D'_f$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x + 1)f(x) \text{ est du signe de } \ln x + 1 \text{ car } f > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = e^{e^{-1} \frac{\ln(e^{-1})}{2}} = e^{-\frac{1}{2e}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ par composition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par composition

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	1	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$+\infty$

Exercice 2 On pose $z_1 = -(\sqrt{3} + i)$ et $z_2 = 1 + i$.

$$1. \frac{z_1}{z_2} = \frac{-(\sqrt{3} + i)}{1 + i} \times \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{-\sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + i^2}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)}{2}$$

$$2. z_1 = -(\sqrt{3} + i) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{-\frac{5i\pi}{6} - \frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-\frac{13i\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

Correction du Test n° 4

Sujet B

Exercice 1 Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{2x} = e^{2x \ln(x)}$

$$D_f = \mathbb{R}_+^* = D'_f$$

$f'(x) = 2(\ln x + 1)f(x)$ est du signe de $\ln x + 1$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$$

$$f(e^{-1}) = e^{2e^{-1} \ln(e^{-1})} = e^{-\frac{2}{e}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ par composition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par composition

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	1	$e^{-\frac{2}{e}}$	$+\infty$

Exercice 1 On pose $z_1 = 1 + i$ $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z = z_1 z_2^2$

$$1. \ z_2^2 = (\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$Z = z_1 z_2^2 = (1 + i)(2 + 2i\sqrt{3}) = 2 + 2i\sqrt{3} + 2i - 2\sqrt{3} = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$$

$$2. \ z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

$$z_2^2 = 4e^{\frac{2i\pi}{6}} = 4e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$Z = 4\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{3}} = 4\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}$$