Exercices École Ouverte Toussaint

Rappels

— On définit les fonctions ch et sh par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

— Arccos et Arcsin sont dérivables sur $]-1;1[$ avec

$$\forall x \in]-1;1[\qquad \mathrm{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{et } \mathrm{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

— Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

— Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b on définit $a^b = e^{b \ln a}$

1 Fonctions

Exercice 1 Calculer les ensembles de définition, de dérivabilité, puis la dérivée des fonctions dont les expressions sont données par

$$a(x) = \left(2x^2 - x - 1\right)^6 \qquad b(x) = 2x + 1 - \frac{3}{(x-2)^3} \qquad c(x) = x\,\mathrm{Arccos}\ (1-x)$$

$$d(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad e(x) = \sqrt{1 - \ln(x)} \qquad f(x) = x^3 e^{-3x+2}$$

$$g(x) = \ln\left(x^2 + 3x\right) \qquad h(x) = (\mathrm{ch}\, x)^x \qquad i(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes

(a) $\ln\left(2x^2+1\right) - 1 = \ln(2x+1)$ (b) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$ (c) $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$

(d) $\ln(x+1) + \ln(x-3) = 2\ln(x-2)$ (e) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ (f) $2e^x = e^{x^2}$

(g) $e^x - 4e^{-x} = 1$ (h) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ (i) $\dfrac{\ln(x)}{\ln 3} - \dfrac{\ln(x)}{\ln 2} = 1$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{-2x} \geq \dfrac{1}{2}$ (b) $e^x < \dfrac{1}{4}e^{x^2}$ (c) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \geq 1$

(d) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} \leq 2$ (e) $e^x \geq e^{2x} - 1$ (f) $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) > 2$

Exercice 4

1. Résoudre l'équation : $\sqrt{e^{2x} - 3e^{x} + 2} = e^{x} - 2$
2. Résoudre l'équation de paramètre réel m : $e^{x} - e^{-x} = 2m$

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3))$ (b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sqrt{x}\,(e^{-x})^3$

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^{x} - 3x^2 - 1\right)$ (e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(x) - x^2\right)$ (f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$ (g) $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{-x^2}$

(h) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} e^{\frac{1}{x}}$ (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^{x}}$

Exercice 6 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1 + x^2} > 0$.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.
   (b) En déduire quelle est la parité de f.
3. (a) Calculer la dérivée de f, et en donner une expression simple.
   (b) Étudier les variations de f.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$.
   (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?
   (c) En déduire la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.

Exercice 7

1. Soit $\psi(x) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) + 1$. Montrer que $\psi(x) > 0$ pour tout réel x.
2. On considère maintenant la fonction $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$. Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$. Observer que $h''(x) = \psi(x)e^{\operatorname{sh}(x)}$.
3. En déduire les tableaux de variations et de signes de h' puis de h.
4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $1 + x \leqslant e^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire du 4) que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 , alors

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\frac{np}{n-1}\right)$$

6. Posons $S_n = \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \geqslant 2}$.

2 Nombres complexes

Exercice 1

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$$a = \frac{(2-\mathrm{i})^2}{1+2\mathrm{i}} \quad b = \frac{5+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \frac{3+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} \quad c_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{6n} \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants où x est un paramètre réel :
$a = \dfrac{3}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}, b = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9, c = -a, d = \dfrac{-3b}{\mathrm{i}a^2}, e = \sin(x) - \mathrm{i}\cos(x)$ et $f = \dfrac{1-\mathrm{i}\tan(x)}{1+\mathrm{i}\tan(x)}$

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = -1-i$, $c = 2i$ et $d = 2-2i$.

1. Faire une figure et placer ces points.
2. Calculer $\dfrac{c-a}{d-a}$ et en déduire la nature du triangle ACD.
3. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.
   (a) Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).
   (b) Donner la forme trigonométrique de z_0.
   (c) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{1}{z_0}$.
   (d) Placer sur la figure l'image M_0' de $\dfrac{1}{z_0}$.
2. On considère maintenant un nombre complexe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, dont la partie réelle x est non nulle.
   (a) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{1}{z}$ en fonction de x et de y.
   (b) Démontrer que z et $\dfrac{1}{z}$ ont des parties réelles égales si et seulement si $|z| = 1$.
3. On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.
   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

(b) Démontrer que $ab + ac + bc = abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big)$.

(c) En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

Exercice 4 On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

1. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \dfrac{\pi}{4}$.
   On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
2. Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t.
   On donnera là aussi les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
3. Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z} \qquad (E)$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(4\theta) = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = x$.
3. On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).
   Montrer que le module de α est nécessairement égal à 0 ou à 1.
4. En déduire toutes les solutions de (E) et représenter leurs images dans le plan complexe, en prenant comme unité 2 cm.

Exercice 6 Posons $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. Calculer $A + B$.
2. Linéariser $A - B$ puis calculer sa valeur numérique.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.

Exercice 7 Soit a un nombre complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,
$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$
2. Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant $\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

Exercice 8

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Linéariser $\cos^2(k\theta)$.
2. Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Écrire $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2ik\theta}$ sous la forme $\lambda \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, où $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \dfrac{n+1}{2} + \dfrac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin(\theta)}$

3. Déduire de ce qui précède que

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{11}{4}$$

3 Bijections

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Déterminer l'image J de $\mathbb{R}$ par f.
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans J et expliciter son application réciproque.

Exercice 2 Montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) = z + 2\bar{z}$ est bijective, et expliciter son application réciproque, également sous la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Soient les fonctions $h : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ et $u : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
2. Montrer que la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$.
3. Déduire de ce qui précède que, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \arctan(x)$.

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^{2x} - 3^{x+1} + 2$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\ln(3)3^x\left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ et dresser le tableau de signe de la fonction f.
5. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$ dans l'intervalle $J = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.
6. Expliciter la bijection réciproque de $f_{|I} : I \longrightarrow J$ (restriction de f à I).