Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 On note f la fonction définie sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

   $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}}$

2. $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\dfrac{x+1}{x}\times\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ pour tout $x\in]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=0$ par croissances comparées donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=0$ par produit et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}^0=1$

   donc $\boxed{C_f \text{ admet une asymptote en } +\infty \text{ d'équation } y=1}$

   Correction 2 $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\dfrac{1}{x}\ln(x(\dfrac{1}{x}+1))=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{\ln(\dfrac{1}{x}+1)}{x}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\dfrac{1}{x}+1)=0$ donc

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=0$ par somme et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\mathrm{e}^0=1$

3. Montrons que $\forall x\in]-1\ ;\ +\infty[,\quad -\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\leqslant 0$

   On pose $g(x)=-\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

   g est définie et dérivable sur $-1\ ;\ +\infty[$ car $x+1>0$ sur cet intervalle.

   $g'(x)=-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{-x-1+1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$ est du signe de $-x$ sur $]-1\ ;\ +\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

   D'après le tableau précédent, $g(x)\leqslant 0\quad\forall x\in]-1\ ;\ +\infty[$ i.e

   $\forall x\in]-1\ ;\ +\infty[,\quad -\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}\leqslant 0$

4. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

   f est dérivable sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ car $1+x>0$ sur cet ensemble et le quotient $\dfrac{1}{x}$ a un dénominateur non nul sur cet ensemble.

   $f'(x)=\varphi'(x)f(x)$ où $\varphi(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$x^2 > 0$ et $f > 0$ sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ donc f' est du signe de g sur cet ensemble, c'est à dire $f'(x) \leqslant 0$ sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = +\infty$ par produit donc $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ par composition

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	||	$-$	
$f(x)$	||	$+\infty$ ↘ e	||	e ↘ 1	

Exercice 2 $\quad z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}, z \neq 1$

1. **Correction 1** $|z-1| = |\overline{z-1}| = |\overline{z}-1| = |1-\overline{z}|$.

   Donc pour $z \neq 1$, $\quad |z'| = \left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right| = 1$.

   Correction 2 On a pour

   $z \neq 1, \quad |z'| = \left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right| = \dfrac{|1-z|}{|\overline{z}-1|} = \dfrac{|1-x-\mathrm{i}y|}{|x-\mathrm{i}y-1|} = \dfrac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 1.$

   On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z \neq 1$,

   $\boxed{|z'| = \mathrm{O}M' = 1}$

   Calculons pour $z \neq 1$, le quotient $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\dfrac{1-z}{\overline{z}-1} - 1}{z-1} = \dfrac{1-z-\overline{z}+1}{(z-1)((\overline{z}-1)}$.

   Le numérateur : $1-z-\overline{z}+1 = 2-(z+\overline{z}) = 2-2x \in \mathbb{R}$;

   Le dénominateur : $(z-1)((\overline{z}-1) = (z-1)\overline{z-1} = |z-1|^2 \in \mathbb{R}_+$ (réel positif).

   Finalement $\boxed{\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}}$ signifie qu'il existe un réel k tel que $z'-1 = k(z-1)$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{A}M'} = k\overrightarrow{\mathrm{A}M}$, ce qui signifie que les points A, M et M' sont alignés.

   Cas $k=0$ $k=0 \Leftrightarrow x=1$ et dans ce cas M' et A sont confondus.

2. D'après la question précédente, M′ est aligné avec A et M et appartient au cercle trigonométrique. $\boxed{M' \text{ est donc l'intersection de ce cercle et de la droite } (AM).}$

   Cette intersection est vide dans 2 cas :

- Dans le cas où M a pour abscisse 1 (M et A non confondus), $k = 0$ et la droite (AM) est tangente au cercle en A, on obtient $z' = 1$ d'après le calcul précédent et l'image de M est le point A.

- Dans le cas où M est sur le cercle trigonométrique, M et M' sont alors confondus.

3. L'angle $\widehat{AM'B}$ est un angle droit car $[AB]$ est un diamètre du cercle trigonométrique et M' est un point de ce cercle, sauf dans le cas où M' et A sont confondus.