Correction du devoir maison n° 5

1. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = \dfrac{2 \times (-x)}{1+(-x)^2} = -h(x)$. Donc $\boxed{h \text{ est impaire}}$.

   (b) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$h'(x) = \frac{2\left(1+x^2\right) - 2x\,(2x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2\,(1-x)\,(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2},$$
qui est du signe de $(1-x)\,(1+x)$ car $2>0$ et $1+x^2>0$.

   $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = \dfrac{2}{x+\frac{1}{x}} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites. Finalement, on a :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$h(x) = 1 \iff \frac{2x}{1+x^2} = 1 \underset{1+x^2\neq 0}{\iff} 2x = 1+x^2 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$
Comme h est impaire, $h(x) = -1 \iff x = -1$. Finalement,

   $\boxed{\text{l'unique antécédent de } 1 \text{ par } h \text{ est } 1, \text{ et l'unique antécédent de } -1 \text{ par } h \text{ est } -1}$.

2. (a) Notons que $g(x) = \arcsin(h(x)) - 2\arctan(x)$.

   D'après la question 1. (b), la fonction h admet pour maximum 1 et pour minimum -1. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) \in [-1,1]$. La fonction arcsin étant définie sur $[-1,1]$, la fonction $\arcsin(h)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

   La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$, comme somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

   D'après la question 1. (c), $h(x) \in \{-1,1\} \iff x \in \{-1,1\}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $h(x) \in]-1,1[$. La fonction arcsin étant dérivable sur $]-1,1[$, la fonction $\arcsin(h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, comme composée de fonctions dérivables.

   La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \arcsin(h(-x)) - 2\arctan(-x) = -g(x)$, car les fonctions h, arcsin et arctan sont impaires. Donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

(c) $g(0) = \arcsin(g(0)) - 2\arctan(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(0) = 0 - 2 \times 0 = 0$.

$g(1) = \arcsin(g(1)) - 2\arctan(1) = \arcsin(1) - 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2} - 2 \times \dfrac{\pi}{4} = 0$.

$g(\sqrt{3}) = \arcsin(g(\sqrt{3})) - 2\arctan(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\arctan(\sqrt{3})$. Donc

$g(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} - 2 \times \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^2(x) \leq 1$ et $\sqrt{1 - h^2(x)} = \sqrt{\dfrac{1 - 2x^2 + x^4}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1 - h^2(x)} = \dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}}$, car $1 + x^2 > 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$:

$$g'(x) = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 - h^2(x)}} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} \times \frac{1+x^2}{|1-x^2|} - \frac{2}{1+x^2}.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\},\ g'(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right) - 2|1-x^2|}{\left(1+x^2\right)|1-x^2|}}$.

(c) Si $x \in]-1, 1[$ alors $x^2 < 1$, donc $|1 - x^2| = 1 - x^2$ et $g'(x) = 0$.

Donc g est constante sur $]-1, 1[$. De plus, $g(0) = 0 = g(1) = g(-1)$ (g est impaire).

Finalement, $\boxed{g \text{ est nulle sur } [-1, 1]}$.

(d) Si $x \in]1, +\infty[$ alors $x^2 > 1$, donc $|1 - x^2| = x^2 - 1$ et

$g'(x) = \dfrac{-4\left(x^2 - 1\right)}{\left(1+x^2\right)\left(x^2-1\right)} = -4\arctan'(x)$.

Donc $(g + 4\arctan)' = g' + 4\arctan'$ est nulle sur $]1, +\infty[$ et $g + 4\arctan$ est constante sur $]1, +\infty[$.

$g(\sqrt{3}) + 4\arctan(\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3} + 4 \times \dfrac{\pi}{3} = \pi$ et $g(1) + 4\arctan(1) = 0 + 4 \times \dfrac{\pi}{4} = \pi$.

Finalement, $g(x) + 4\arctan(x) = \pi$ sur $[1, +\infty[$, et
$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[,\ g(x) = \pi - 4\arctan(x)}$.

(e) Si $x \in]-\infty, -1]$ alors $-x \in [1, +\infty[$ et, comme g est impaire, on a :

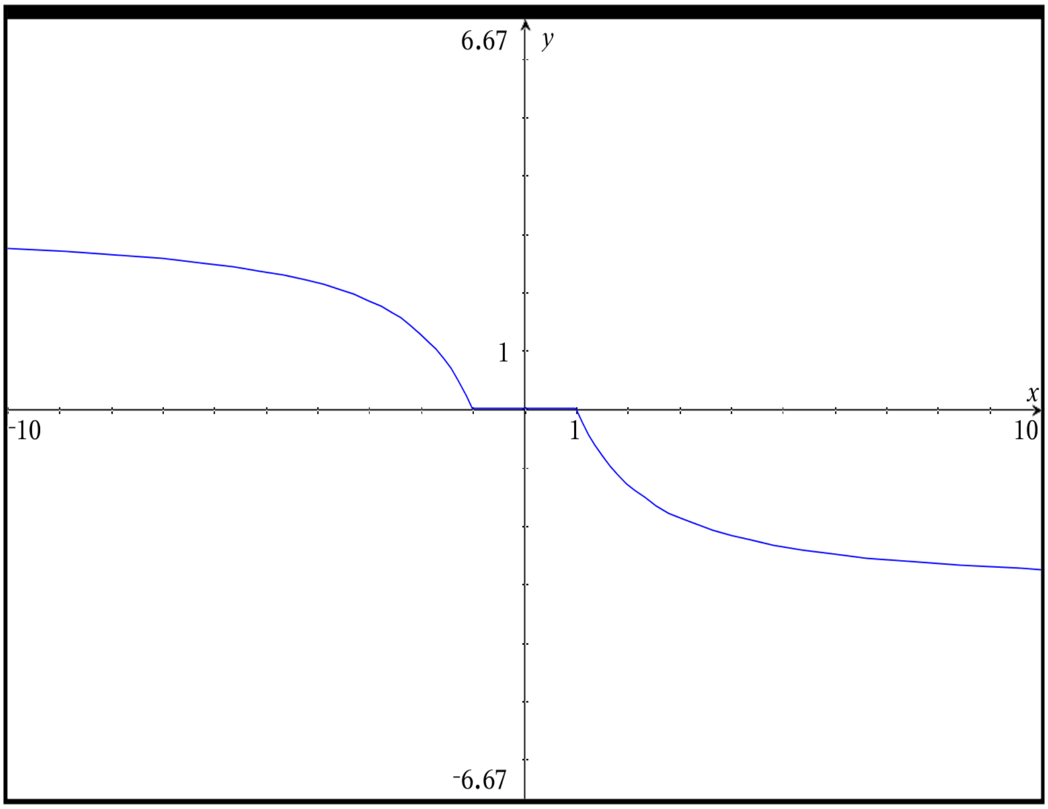
$$g(x) = -g(-x) = -\pi + 4\arctan(-x).$$

Comme arctan est impaire, $\boxed{\forall x \in]-\infty, -1],\ g(x) = -\pi - 4\arctan(x)}$.

4. Sur $[1, +\infty[$, $g = \pi - 4\arctan$ est décroissante car arctan est croissante et $-4 < 0$.

   En $+\infty$, $g(x) = \pi - 4\arctan(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \pi - 4 \times \dfrac{\pi}{2} = -\pi$, par opérations sur les limites.

   Comme g est impaire, de ce qui précède, on déduit l'allure du graphe de g :



1 sur : 1