Correction École Ouverte 20/10/2025

1 Fonctions

Exercice 1 $a'(x) = 6(4x-1)\left(2x^2-x-1\right)^5$ sur $\mathbb{R}$ $\quad b'(x) = 2 + \dfrac{9}{(x-2)^4}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
$c'(x) = \operatorname{Arccos}\ (1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ sur $]0,2[$. À noter que c est encore dérivable en 0 avec $c'(0) = 0$ en étudiant le taux d'accroissement :

$$\frac{c(x)-c(0)}{x} = \operatorname{Arccos}(1-x) \xrightarrow{x\to 0} \operatorname{Arccos}(1) = 0$$

.

$d'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ sur $]-1,1[$ $\quad e'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln(x)}}$ sur $]0,\mathrm{e}[$

$f'(x) = 3x^2(1-x)e^{-3x+2}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad g'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$

$h'(x) = \left(\ln(\operatorname{ch} x) + x\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)(\operatorname{ch} x)^x$ sur $\mathbb{R}$ $\quad k'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2

(a) $\ln\left(2x^2+1\right) - 1 = \ln(2x+1) \Leftrightarrow 2x^2+1 = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}$ et $x > -\dfrac{1}{2}$
$\Delta = 4(\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-2) > 0, x = \dfrac{\mathrm{e}\pm\sqrt{\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-2}}{2} > -\dfrac{1}{2}$

(b) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$ et $x > 0$ en posant $X = \ln x$ on obtient $X = 1$ ou $X = -4$ puis $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^{-4}$

(c) $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$ et $x > 0 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0$ et $x > 0$ donc l'unique solution est $x = 1$

(d) $\ln(x+1) + \ln(x-3) = 2\ln(x-2)$ et $x > 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

(e) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^x$ on trouve $X = 1$ ou $X = -2$ (impossible) donc la seule solution est $x = 0$

(f) $2e^x = e^{x^2} \Leftrightarrow \ln 2 + x = x^2, \Delta = 1 + 4\ln 2, x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$

(g) $e^x - 4e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 4 = \mathrm{e}^x$ et en posant $X = \mathrm{e}^x$ on obtient $X = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ et l'unique solution est $x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

(h) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, $a > 0,\ a \neq, x > 0, x \neq 1 \Leftrightarrow \ln^2 x = \ln^2 a \Leftrightarrow \ln x = \pm \ln a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = \dfrac{1}{a}$ ces solutions étant strictement positives et différentes de 1.

(i) $\dfrac{\ln(x)}{\ln 3} - \dfrac{\ln(x)}{\ln 2} = 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}} > 0$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{-2x} \geq \dfrac{1}{2}\ S =]-\infty, \dfrac{\ln 2}{2}]$

(b) $e^x < \dfrac{1}{4}e^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - x - \ln 4 > 0$ et $S =]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{1+4\ln 4}}{2}[\cup]\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln 4}}{2}, +\infty[$

(c) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \geq 1$ pour $x \in]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[, S = [\dfrac{2}{1-\mathrm{e}}, -1[$

(d) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} \leq 2$ pour $x \neq 0, S =]-\infty, 0[\cup[\ln 3, +\infty[$

(e) $e^x \geq e^{2x} - 1, S =]-\infty, \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)]$

(f) $\ln\left(e^x - e^{-x}\right) > 2$ pour $x > 0, S =]\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2+\sqrt{\mathrm{e}^4+4}}{2}\right), +\infty[$

Exercice 4

1. $\sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2} = e^x - 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
2. $e^x - e^{-x} = 2m \Leftrightarrow x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right), \forall\, m \in \mathbb{R}$

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes :

(a) $\ln(x+1) - \ln(2x-3) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-3} = \dfrac{1}{2}$ comme limite d'une fraction rationnelle, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3)) = -\ln 2}$ par composition.

(b) $\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \sqrt{x}\ln x + \sqrt{x}\ln(x+1)$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x+1) = 0$ par produit donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0}$ par somme.

(c) $x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-3x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(e^{-x}\right)^3 = 0}$ par croissance comparée.

(d) $e^x - 3x^2 - 1 = x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - 3x^2 - 1\right) = +\infty}$ par croissance comparée et produit.

(e) $\ln(x) - x^2 = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x) - x^2\right) = -\infty}$ par croissance comparée et produit.

(f) $\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\dfrac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x} = 1$ comme limite d'une fraction rationnelle donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0}$ par produit.

(g) $xe^{-x^2} = \dfrac{1}{x}x^2e^{-x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0}$ par produit.

(h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1} = \dfrac{x+2}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{1}{X}+2}{1+X}$ en posant $X = \dfrac{1}{x} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0_+$

$\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{X}+2\right)\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\dfrac{X}{X+1}$ avec $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}+2 = 2$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée et $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{X+1} = 1$ comme limite d'une fraction rationnelle.

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$ par produit.

(i) $\dfrac{\ln(x)}{e^x} = \dfrac{\ln(x)}{x}\dfrac{x}{e^x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0}$ par croissance comparée et produit.

Exercice 6 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{1+x^2} > 0$.

   $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$, or $\sqrt{x^2} = |x|$ et $|x| \geq -x$ donc $\sqrt{1+x^2} > -x$ donc $x+\sqrt{1+x^2} > 0$.

   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.

   Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = 2 \Leftrightarrow x+\sqrt{1+x^2} = e^2 \Leftrightarrow 1+x^2 = \left(e^2-x\right)^2$ car $1+x^2 \geq 0$

   donc $f(x) = 2 \Leftrightarrow 1+x^2 = e^4-2e^2x+x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^4-1}{2e^2}$. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{e^4-1}{2e^2}\right\}$.

   Or $e\approx 2,7$, donc $\dfrac{e^2}{2} \approx \dfrac{7,29}{2}$, et $\dfrac{1}{2e^2} < 0,1$, donc $\dfrac{e^4-1}{2e^2} \approx 3,6$ au dixième près.

2. (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f(-x) = 0$.

   $f(x)+f(-x) = \ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] = \ln\left(1+x^2-x^2\right) = \ln 1 = 0.$

(b) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

3. (a) Calculer la dérivée de f, et en donner une expression simple.

$f'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Étudier les variations de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc l'équation de T est : $y = x$.

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$.

$\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = \dfrac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2} = \dfrac{e^{f(x)} - e^{f(-x)}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2} - (-x) - \sqrt{1+x^2}\right) = x$

(b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et comme f est impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Comme f est strictement croissante, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$, donc f et sinus hyperbolique sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

(c) En déduire très facilement la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.

$\operatorname{sh} x = 2 \Leftrightarrow x = f(2)$ donc $\mathcal{S} = \left\{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right\}$.

Exercice 7

1. $\psi(x) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) + 1 = X^2 + X + 1$ où $X = \operatorname{sh} x$. Or le trinôme n'a pas de racine réelle et est donc à valeurs > 0 vu le coefficient de X^2.

2. On considère maintenant la fonction $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$.

h est deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ et

$h'(x) = \operatorname{ch}(x)e^{\operatorname{sh} x} - 1$ et

$h''(x) = \operatorname{sh}(x)e^{\operatorname{sh} x} + \operatorname{ch}^2(x)e^{\operatorname{sh} x} = (\operatorname{sh} x + \operatorname{ch}^2 x)e^{\operatorname{sh} x} = \psi(x)e^{\operatorname{sh}(x)}$ car $\operatorname{ch}^2 x = \operatorname{sh}^2 x + 1$ pour tout x.

3.

x	-1		0		1
$h''(x)$		$+$		$+$	
$h'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	-1		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que h est positive sur $[-1,1]$.

4. Pour tout $x \in [0,1[\ \ 1+x \leqslant e^{\operatorname{sh}(x)}$ car $h(x) \geqslant 0$ sur $[0,1[$

   De plus, $h(-x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sh}(-x)} + x - 1 \geqslant 0$ sur $[0,1[$. Or $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$ pour tout x, d'où $\mathrm{e}^{-\operatorname{sh}(x)} \geqslant 1 - x > 0$ pour tout $x \in [0,1[$ puis $\mathrm{e}^{\operatorname{sh}(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in [0,1[$, car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans l'encadrement précédent, on remplace x par $\dfrac{1}{k} \in [0,1[$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $0 < 1 + \dfrac{1}{k} \leqslant \mathrm{e}^{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}}$

   On en déduit que $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}}\right)$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

   Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$

   et de même, $\ln\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{k}}\right) = \ln(k) - \ln(k-1)$

   En sommant cet encadrement pour k allant de n à pn et en remarquant que les sommes de droite et de gauche sont télescopiques (sommes de différences successives), on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 ,

   $\ln(np+1) - \ln n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(np) - \ln(n-1)$, i.e

   $$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\frac{pn}{n-1}\right)$$

6. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = p$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{np}{n-1} = p$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln p$ par encadrement.

2 Nombres complexes

Exercice 1

1. $a = \dfrac{(2-\mathrm{i})^2}{1+2\mathrm{i}} = \dfrac{(4-4\mathrm{i}-1)(1-2\mathrm{i})}{5} = -1-2\mathrm{i}$

   $b = \dfrac{5+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} - \dfrac{3+\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}} = \dfrac{(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{10} - \dfrac{(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{26}$

   $b = \dfrac{13(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}) - 5(5+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{130} = \dfrac{8}{65}(7+4\mathrm{i})$

   $c_n = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{6n} = \cos(n\pi) + \mathrm{i}\sin(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants (où x est un paramètre réel) :

   $a = \dfrac{3}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2(1/2+\mathrm{i}\sqrt{3}/2)} = \dfrac{3}{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $b = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^9 = \left(\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}\right)^9 = \mathrm{e}^{\frac{9\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

   $c = -a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \times \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $d = \dfrac{-3b}{ia^2} = \dfrac{3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \times \dfrac{9}{4}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}} = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{3}}$

   $\mathrm{e} = \sin(x) - \mathrm{i}\cos(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x - \frac{\mathrm{i}\pi}{2}\right)}$

   $f = \dfrac{1-\mathrm{i}\tan(x)}{1+\mathrm{i}\tan(x)} = \dfrac{\cos(x)-\mathrm{i}\sin(x)}{\cos(x)+\mathrm{i}\sin(x)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}$ pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.

3. $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2\mathrm{i}$.

   a)$P(\mathrm{i}) = 0$.

   b)$P(z) = P(z) - P(\mathrm{i}) = z^3 - \mathrm{i}^3 + 3(z^2 - \mathrm{i}^2) + 3(z-\mathrm{i})$

   $P(z) = (z-\mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z + \mathrm{i}^2) + 3(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}) + 3(z-\mathrm{i})$

   $P(z) = (z-\mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1 + 3z + 3\mathrm{i} + 3) = (z-\mathrm{i})(z^2 + (3+\mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i})$

   c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \mathrm{i}$ ou $z^2 + (3+\mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i} = 0$

   $\Delta = (3+\mathrm{i})^2 - 4(2+3\mathrm{i}) = 9 + 6\mathrm{i} - 1 - 8 - 12\mathrm{i} = -6\mathrm{i} = 6\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

   $\delta = \sqrt{6}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}$

   $z_2 = \dfrac{-3+\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1-\sqrt{3})}{2}$ et $z_3 = \dfrac{-3-\sqrt{3}+\mathrm{i}(-1+\sqrt{3})}{2}$

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = -1-i$, $c = 2i$ et $d = 2-2i$.

1.

2. $\dfrac{c-a}{d-a} = \dfrac{2i-(-1+i)}{2-2i-(-1+i)} = \dfrac{1+i}{3-3i} = \dfrac{(1+i)(3+3i)}{18} = \dfrac{i}{3}$ imaginaire pur donc le triangle ACD est rectangle en A.

3. On considère le point I d'affixe 1. On a $AI = |-1+i-1| = |-2+i| = \sqrt{5}$,

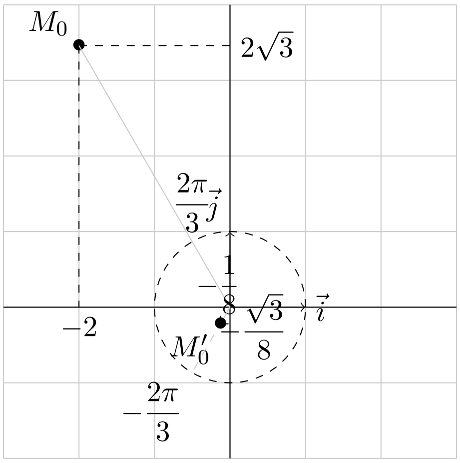
   $BI = |-1-i-1| = |-2-i| = \sqrt{5}$, $CI = |2i-1| = \sqrt{5}$, $AI = |2-2i-1| = |1-2i| = \sqrt{5}$.

   Donc les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 3

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

   (a) Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).



   (b) $z_0 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   (c) $\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

   (d)

2. Pour $x \neq 0$

   (a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

   (b) $Re(z) = Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$ car $x \neq 0$.

   donc $Re(z) = Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ car $|z|$ est un nombre positif.

3. On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.

   (a) Démontrer que $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

   $a\overline{a} = |a|^2 = 1$ donc $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$.

   (b) Démontrer que $ab + ac + bc = abc(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})$.

   $abc(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) = a\overline{a}bc + ab\overline{b}c + abc\overline{c} = bc + ac + ab$ car $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$.

   (c) En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

   Par Qb) : $|ab + ac + bc| = \left|abc(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})\right| = |a|.|b|.|c|.\left|\overline{a+b+c}\right| = |a+b+c|$.

Exercice 4 On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

1. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \frac{\pi}{4}$.

   Pour $t = \frac{\pi}{4}$, l'équation s'écrit $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

   $\Delta = -2 = \left(i\sqrt{2}\right)^2$ donc les solutions de l'équation sont :

   $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t.

   $\Delta = (2\sin t)^2 - 4 = 4\left(\sin^2 t - 1\right) = -4\cos^2 t = (2i\cos t)^2$,

   donc $z_1 = \frac{2\sin t - 2i\cos t}{2} = \sin t - i\cos t = e^{i\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$,

   et $z_2 = \frac{2\sin t + 2i\cos t}{2} = \sin t + i\cos t = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$.

3. Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$.

   D'après ce qui précède, on a $z^2 = e^{i\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$ ou $z^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$.

   Donc $\mathcal{S} = \left\{e^{i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, -e^{i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}, -e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}\right\}$

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$ (E)

1. $\cos(4\theta) = 1 \Leftrightarrow 4\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = k \times \frac{\pi}{2}$. $\mathcal{S} = \left\{k \times \frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $x^3 = x \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$. $\mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.

3. On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).

   On a $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ donc $\left|\alpha^3\right| = |\overline{\alpha}|$ donc $|\alpha|^3 = |\alpha|$, donc, d'après la question précédente, $|\alpha|$ est égal à -1 (exclu), ou 0 ou 1.

4. $z = 0$ est clairement une solution de (E). Toute autre solution serait nécessairement de module 1 et pourrait donc s'écrire $z = e^{i\theta}$.

   Alors $z^3 = \overline{z} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{4i\theta} = 1 \Leftrightarrow \cos(4\theta) = 1$.

   D'après 1., les solutions de (E) sont finalement 0, $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{2i\frac{\pi}{2}} = -1$, et $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Exercice 6 Posons $A = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $B = \sum_{k=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. $A + B = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 4$

2. $A - B = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$

   $= 2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} + \cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{2}$, car $\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$.

3. En déduire les valeurs exactes de A et B.
$$\begin{cases} A+B=4 \\ A-B=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{7}{4} \\ B=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Exercice 7 Soit a un complexe de module $|a|<1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1-\bar{a}z \neq 0$,
$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$
$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1-\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})-(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}$$
$$= \frac{1+\bar{a}za\bar{z}-z\bar{z}-a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-a\bar{a})(1-z\bar{z})}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.
On a $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1$
D'après la question précédente, c'est équivalent à $\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0$
or par hypothèse, $1-|a|^2 \geq 0$, et bien sûr $|1-\bar{a}z|^2 \geq 0$
donc c'est encore équivalent à : $1-|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$.
L'ensemble des nombres complexes vérifiant la relation $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$ est l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 8

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. $\boxed{\cos^2(k\theta) = \frac{1+\cos(2k\theta)}{2}}$.
2. Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) $e^{2i\theta}=1 \Longleftrightarrow 2\theta = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Donc $e^{2i\theta} \neq 1$ et
   $S_n = \sum_{k=0}^{n} (e^{2i\theta})^k = \frac{1-e^{2i(n+1)\theta}}{1-e^{2i\theta}}$.
   En factorisant par l'angle de moitié, on obtient :
   $S_n = \frac{\left(e^{-i(n+1)\theta}-e^{i(n+1)\theta}\right)e^{i(n+1)\theta}}{\left(e^{-i\theta}-e^{i\theta}\right)e^{i\theta}} \underset{\text{Euler}}{=} \frac{-2i\sin((n+1)\theta)e^{in\theta}}{-2i\sin(\theta)}$.
   Donc $\boxed{S_n = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}e^{in\theta}}$, avec $\lambda = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$ et $\alpha = n\theta \in \mathbb{R}$.

   (b) $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) \underset{1.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\cos(2k\theta)}{2} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$.

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \cos(2k\theta) \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^k\right) \underset{2.(a)}{=} \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin(\theta)}}$.

3. Si $\theta = \pi/9$ et $n = 4$, on obtient :

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sin(5\pi/9)\cos(4\pi/9)}{2\sin(\pi/9)}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{9} - \frac{4\pi}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right].$$

Comme $\sin(\pi) = 0$, on a :

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sin(\pi/9)}{4\sin(\pi/9)} = \frac{5}{2} + \frac{1}{4}.$$

Donc, $\boxed{1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{11}{4}}$.

3 Bijections

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}, -\mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x + 1$ et en divisant par $\mathrm{e}^x + 1 > 0$ on obtient

   $-1 < f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ par quotient et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc f prend toute valeur < 1 et toute valeur > -1. Ainsi, $\boxed{J = f(\mathbb{R}) =]-1, 1[}$.

2. $y = f(x) \Leftrightarrow y(\mathrm{e}^x + 1) = \mathrm{e}^x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(y-1) = -1 - y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \dfrac{1+y}{1-y}$ et

   $y \neq 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ et $y \in]-1, 1[$

   Pour tout $y \in]-1, 1[$, il existe alors un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ et $\begin{array}{rcl} f^{-1} :]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$

Exercice 2 $z' = f(z) = z + 2\bar{z} \Leftrightarrow x' + \mathrm{i}y' = 3x - \mathrm{i}y$ donc f est bijective de $\mathbb{C}$ dans lui-même avec $z = \dfrac{x'}{3} - \mathrm{i}y'$

Or $\alpha z + \beta\bar{z} = (\alpha + \beta)x + \mathrm{i}(\alpha - \beta)y$ donc $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha - \beta = -1$ d'où $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ et $\beta = \dfrac{2}{3}$ et

$\boxed{f^{-1}(z) = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\bar{z}}$

Exercice 3

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x^2>0$. Donc $\boxed{u \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$u'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+x^2}.$$
Comme $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ u'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$.

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$ donc $|u(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ car $\sqrt{1+x^2}>0$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1<u(x)<1$. Donc $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme composée de fonctions définies et dérivables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$h'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ h'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)}$.

3. On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = \arctan(x)+C$.

   $h(0) = \arcsin(0) = 0 = \arctan(0)$ donc $C=0$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ h(x) = \arctan(x)}$.

Exercice 4

1. Pour tout réel x, $f(x) = 3^x(3^x-3)+2 = \mathrm{e}^{x\ln(3)}\left(\mathrm{e}^{x\ln(3)}-3\right)+2$.

   $\ln(3)>0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ et } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$, par opérations sur les limites.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2x\ln(3)} - 3\mathrm{e}^{x\ln(3)}+2$.

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions dérivables et

   $f'(x) = 2\ln(3)\mathrm{e}^{2x\ln(3)} - 3\ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(3)} = 2\ln(3)3^{2x} - 3\ln(3)3^x = 2\ln(3)3^x\left(3^x-\frac{3}{2}\right)$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\ln(3)3^x\left(3^x-\frac{3}{2}\right)}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x)$ est du signe de $3^x - \dfrac{3}{2}$ car $2\ln(3)3^x>0$. De plus,

   $$3^x-\frac{3}{2}>0 \iff 3^x>\frac{3}{2} \underset{\ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\iff} x\ln(3)>\ln(3/2) \underset{\ln(3)>0}{\iff} x>\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$$
   $$f\left(\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}\right) = \mathrm{e}^{2\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} - 3\mathrm{e}^{\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}}+2 = \mathrm{e}^{\ln(9/4)} - 3\mathrm{e}^{\ln(3/2)}+2 = \frac{9}{4}-\frac{9}{2}+2 = -\frac{1}{4}$$
   On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $f(x) = 0 \iff (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = 0 \iff \begin{cases} X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = 3^x \end{cases}$ trinôme du second degré de racines évidentes 1 et 2. Donc

   $f(x) = 0 \iff (3^x = 1 \text{ ou } 3^x = 2) \iff (x\ln(3) = \ln(1) \text{ ou } x\ln(3) = \ln(2))$

   Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est } S = \left\{0; \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}}$

   À l'aide du tableau de variation de f, on en déduit son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection et le tableau de variation de f,

   $\boxed{f \text{ réalise un bijection de } I \text{ dans l'intervalle } f(I) = J = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[}.$

6. Soit $y \in \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$ fixé quelconque et $x \in \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$.

   $y = f(x) \iff (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = y \iff \left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} = y+ \iff \left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)^2 = y + \dfrac{1}{4}$

   De plus, $y + \dfrac{1}{4} \geq 0$ et $x\ln(3) \geq \ln(3/2)$ (car $\ln(3) > 0$) donc $3^x \geq \dfrac{3}{2}$ (car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$). Donc

   $y = f(x) \iff 3^x - \dfrac{3}{2} = \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \iff 3^x = \dfrac{3}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}} \iff x\ln(3) = \ln\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{y + \dfrac{1}{4}}\right)$

   D'où $\boxed{f_{|I}^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[& \longrightarrow & \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln 3}, +\infty\right[\\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(\dfrac{3}{2} + \sqrt{x + \dfrac{1}{4}}\right)}{\ln 3} \end{array} \right.}$