

Correction du Devoir maison n° 5

On note $\mathcal{P}$ le plan complexe. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto 2z(1-z) \end{cases}.$$

On note $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z associe le point $F(M)$ d'affixe $f(z)$.

1. $z = f(z) \Leftrightarrow z = 2z - 2z^2 \Leftrightarrow z(1 - 2z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = \frac{1}{2}$

Les points fixes de F sont les points d'affixes 0 et $\frac{1}{2}$

2. $f(z) = -4 \Leftrightarrow z^2 - z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-2) = 0$

Les points ayant pour image par F le point A d'affixe -4 sont les points d'affixes -1 et 2

3. $f(z) = 2 + 2i \Leftrightarrow z^2 - z + 1 + i = 0 \quad \Delta = -3 - 4i = \delta^2$ avec

$$\delta = x + iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \delta = \pm(1 - 2i) \text{ et } z = 1 - i \text{ ou } z = i$$

Les points ayant pour image par F le point B d'affixe $2 + 2i$ sont les points d'affixes $1 - i$ et i

4. On a

$$\begin{aligned} F(M_1) = F(M_2) &\Leftrightarrow f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow 2z_1(1 - z_1) = 2z_2(1 - z_2) \Leftrightarrow z_1^2 - z_2^2 - (z_1 - z_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) - (z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(z_1 + z_2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z_1 + z_2 - 1 = 0 \text{ car } z_1 \neq z_2 \\ &\Leftrightarrow \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour deux points distincts M_1 et M_2 , on a

$F(M_1) = F(M_2)$ si et seulement si le milieu du segment $[M_1M_2]$ est le point d'affixe $\frac{1}{2}$.

5. La question précédente montre que l'on n'a pas $F(M_1) = F(M_2)$ qui implique

$M_1 = M_2$. Par exemple, en considérant les points M_0 et M_1 d'affixes respectives 0 et 1 (ou -1 et 2 d'après 2.), on a $f(0) = f(1)$ donc $F(M_0) = F(M_1)$ et pourtant $M_0 \neq M_1$.

Par conséquent, la fonction F n'est pas injective.

6. Soit N un point du plan d'affixe a . On a $f(z) = a \Leftrightarrow 2z(1 - z) = a \Leftrightarrow z^2 - z + \frac{a}{2} = 0$.
L'équation polynomiale à coefficients complexes $z^2 - z + \frac{a}{2} = 0$ possède au moins une

solution $z_0 \in \mathbb{C}$ donc il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = a$. En notant M le point d'affixe z_0 , on a $F(M) = N$ donc F est surjective.

7. Soit M un point du plan d'affixe a . On a M possède un unique antécédent si et seulement si l'équation $f(z) = a$ possède une unique solution z dans $\mathbb{C}$. Or $f(z) = a \Leftrightarrow 2z(1-z) = a \Leftrightarrow z^2 - z + \frac{a}{2} = 0$. Donc, l'équation $f(z) = a$ possède une unique solution si et seulement si le discriminant du polynôme $z^2 - z + \frac{a}{2}$ est nul, ie si et seulement si $1 - 4\frac{a}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Le point d'affixe $\frac{1}{2}$ est le seul point du plan ayant un unique antécédent par F .

8. Soit $\theta \in [0, \pi]$. On peut réécrire

$$\begin{aligned} f(e^{i\theta}) &= 2e^{i\theta}(1 - e^{i\theta}) = 2e^{i\theta}e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -4i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{3\theta}{2}} = 4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{-\pi}{2}} e^{i\frac{3\theta}{2}} \\ &= 4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i[\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}]}. \end{aligned}$$

On a $\frac{\theta}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$. Par conséquent, l'écriture $f(e^{i\theta}) = 4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i[\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}]}$ correspond à l'écriture trigonométrique du complexe $f(e^{i\theta})$. On en déduit que

$f(e^{i\theta})$ a pour module $4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et un argument est $\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$.