

Devoir maison n° 6

A rendre le jeudi 13 novembre 2025

Exercice 1 Le but de cet exercice est de calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+2+3+\dots+k}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $u_k = \frac{1}{1+2+3+\dots+k}$ en fonction de k , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire la valeur de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 Le but de cet exercice est de calculer $P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

1. Calculer $A_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
2. Calculer $B_n = \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
3. Déduire des deux questions précédentes la valeur de P_n en fonction de n .

Exercice 3

1. Discuter en fonction des valeurs du réel m l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

2. Discuter en fonction des valeurs des réels a, b, c , l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ 4x - 5y - 3z = c \end{cases}$$