

Devoir maison n° 7

A rendre le jeudi 20 novembre 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \sqrt{t^2 + 1} dt$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$.
2. En déduire I_0 .
3. Calculer I_1 .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $I_{n+2} + I_n = J_n$.
5. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)J_n$$

6. Déduire des questions précédentes une expression de I_{n+2} en fonction de I_n , puis calculer I_2 et I_3 .