

Correction du devoir surveillé n° 1

Exercice 1

$$1. \alpha = \frac{113\pi}{6} = \frac{120\pi}{6} - \frac{7\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6} [2\pi] \text{ donc } \boxed{\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{1}{2}}$$

$$\beta = -\frac{63\pi}{8} = -\frac{64\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8} [2\pi] \text{ donc } \cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ et } \sin(\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0 \text{ donc}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ donc } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\text{Finalement, } \boxed{\cos(\beta) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

$$\gamma = \frac{77\pi}{12} = \frac{72\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} [2\pi] \text{ donc } \cos(\gamma) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin(\gamma) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Par la même démarche que celle pour trouver le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{8}$, on obtient

$$\boxed{\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$$

$$2. \text{ a) } \textbf{Attention aux valeurs interdites !} \text{ Ici } 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(2x - \frac{\pi}{3}) = -1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Or } \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} + \frac{k'\pi}{2} \Leftrightarrow k - k' = -\frac{9}{12} \text{ ce qui est impossible car } k - k' \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

$$\text{b) } \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{x}{4} [2\pi] \text{ ou } x + \frac{3\pi}{4} = -\frac{x}{4} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}x = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } \frac{3}{4}x = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{5} \left[\frac{8\pi}{5}\right] \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} \left[\frac{8\pi}{5}\right]}$$

$$3) \text{ a) } \cos(3x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 3x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$\boxed{S =]\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}[, k \in \mathbb{Z}}$$

$$b) \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) > \sin\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) > 0$$

$$\text{Or } \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ donc cette inéquation équivaut à}$$

$$\sin\left(\frac{3x}{8} - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{5x}{8} - \frac{5\pi}{8}\right) < 0$$

$$\text{Or } \sin X \text{ et } \sin Y \text{ sont de signes opposés ssi } X \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\text{ et}$$

$$Y \in]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi[\text{ ou l'inverse.}$$

$$\text{Ce qui donne } S =]\frac{\pi}{3} + \frac{16k\pi}{3}, \pi + \frac{16k\pi}{3}[\cap]\frac{13\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, \frac{21\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}[\cup]3\pi + \frac{16k\pi}{3}, \frac{17\pi}{3} + \frac{16k\pi}{3}[\cap]\pi + \frac{16\pi}{5}, \frac{13\pi}{5} + \frac{16\pi}{5}[$$

Exercice 2

$$1. 4 < 5 < 9 \text{ donc } 2 < \sqrt{5} < 3 \text{ puis } 1 < \sqrt{5} - 1 < 2 \text{ donc } \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{1}{2} \text{ et}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{4} \in [0, 1]}$$

$$2. (a) \cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1 = 2(1 - 2\sin^2 x)^2 - 1 = 2(1 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x) - 1$$

$$\boxed{\cos(4x) = 8\sin^4 x - 8\sin^2 x + 1}$$

$$(b) \sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ donc } \sin^2 \theta = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \text{ puis}$$

$$\sin^4 \theta = \frac{(3-\sqrt{5})^2}{8^2} = \frac{14-6\sqrt{5}}{8^2} = \frac{7-3\sqrt{5}}{32}. \text{ On a alors}$$

$$8\sin^4 \theta - 8\sin^2 \theta + 1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{4} - 3 + \sqrt{5} + 1 = \frac{7-3\sqrt{5}-8+4\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin \theta$$

$$\text{donc } \boxed{\cos(4\theta) = \sin \theta}$$

$$(c) \cos(4\theta) = \sin \theta \Leftrightarrow \cos(4\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \Leftrightarrow 4\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi \text{ ou } 4\theta = -\frac{\pi}{2} + \theta + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$\text{Or } \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) = \pm \frac{1}{2} \text{ donc il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}.$$

$$\text{Comme } \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\text{ on obtient } k = 2 \text{ et } \boxed{\theta = \frac{9\pi}{10}}$$

Exercice 3

$$1. a = 1 - 7i \text{ et } b = \frac{7-i}{10}$$

$$2. P(z) = iz^3 + (2i-1)z^2 - (4+i)z - 3 + 6i.$$

$$a) P(i) = 0 \text{ mais ce n'est pas la question.}$$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow i\alpha^3 + (2i-1)\alpha^2 - (4+i)\alpha - 3 + 6i = 0 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(P(\alpha)) = -\alpha^2 - 4\alpha - 3 = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(P(\alpha)) = \alpha^3 + 2\alpha^2 - \alpha + 6 = 0$$

Or l'équation $\alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0$ admet deux racines réelles -1 et -3 . En remplaçant dans la deuxième équation on trouve $\boxed{\alpha = -3 \text{ comme unique racine réelle de } P}$ car unique solution du système.

b) $P(z) = (z + 3)(iz^2 - (1 + i)z - 1 + 2i) = (z - i)(iz^2 + (2i - 2)z - 3i - 6)$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = -3$ ou $iz^2 - (1 + i)z - 1 + 2i = 0$

$\Delta = (1 + i)^2 - 4i(-1 + 2i) = 8 + 6i = \delta^2$ En posant $\delta = x + iy$ on obtient

$x^2 - y^2 = 8$ et $xy > 0$ et $x^2 + y^2 = 10$

d'où $\delta = 3 + i$

$z_2 = \frac{1 + i + 3 + i}{2i} = 1 - 2i$ et $z_3 = \frac{1 + i - 3 - i}{2i} = i$

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont } -3, i \text{ et } 1 - 2i}$

Exercice 4 $E(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{E(z)} = -E(z)$

$$\overline{E(z)} = \frac{\bar{z} + \bar{a}\bar{b}z - \bar{a} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}$$

Or a et b sont de module 1, donc $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$ et $\bar{a} - \bar{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$

$$\overline{E(z)} = \frac{(\bar{z} + \frac{z}{ab} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b})ab}{b - a} = \frac{ab\bar{z} + z - b - a}{b - a} = -E(z)$$