Calculs algébriques et systèmes linéaires

Exercice 1 Calculer les sommes et produits suivants :

1. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$
2. a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^2(n+1-k)$ b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$ c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$

Exercice 2

1. Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. Calculer $\displaystyle S_n=\sum_{k=0}^{n}(2k)^3$ et $\displaystyle T_n=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^3$

Exercice 3

1. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leq 2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{k}}$
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déduire de ce qui précède que $\displaystyle 2\sqrt{n+1}-2\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq 2\sqrt{n}-1$
3. Quelle est la limite de $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque $n\to+\infty$?

Exercice 4

1. Soient $n\in\mathbb{N}$, $p\in[\![0,n]\!]$ et $k\in[\![0,p]\!]$. Montrer que $\displaystyle\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
2. Calculer $\displaystyle S_n=\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 5 Écrire sous forme algébrique les nombres $a=(1-2\mathrm{i})^4$, $\displaystyle b=\frac{(2+\mathrm{i})^3}{1+\mathrm{i}}$ et $\displaystyle c=\sum_{k=-10}^{10}\mathrm{i}^k$.

Exercice 6 Soit la fonction $f:\left|\begin{array}{ll}\mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}\\ x & \longmapsto (x+1)^n\end{array}\right.$

1. Développer $f(x)$. En dérivant l'égalité obtenue, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 7 Calculer les sommes suivantes : 1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j$ 2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min\{i,j\}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{i}{j+n}$ 4. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \binom{j}{i}$.

Exercice 8 Résoudre les systèmes suivants : 1. $\begin{cases} 2x+6y=3 \\ 5x-8y=1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+3z=-8 \\ 3x+y+z=4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y+z=3 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 2x+3y-z=-6 \\ 3x-y+2z=14 \\ 7x+4y-10z=-47 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x-y+z=5 \\ 2x-4y+3z=1 \\ 4x+2y-z=6 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x+3y-z=4 \\ 4x+6y+3z=-1 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 4x+2y-2z=-1 \\ x+2y+z=2 \\ 3x-4y-4z=-3 \end{cases}$

Exercice 9 Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants : 1. $\begin{cases} 5x-6y=m \\ 6x-7y=m+1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} mx+y=1 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants : 1. $\begin{cases} (1+\mathrm{i})x & + & (1-\mathrm{i})y & = & 4+2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}x & + & (2\mathrm{i}+1)y & = & 3\mathrm{i}-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1-2\mathrm{i})x & + & 2y & = & 3-7\mathrm{i} \\ 3x & - & (1-\mathrm{i})y & = & 11+3\mathrm{i} \end{cases}$

Exercice 11 Discuter en fonction des valeurs des réels a, b, c, l'ensemble des solutions du système suivant : $\begin{cases} 2x-y+z=a \\ -x+2y+2z=b \\ 4x-5y-3z=c \end{cases}$