DS1 de Mathématiques - 2 heures

samedi 20 septembre 2025

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (Trigonométrie) (6 points: **1)** 3x0.5 **2)** 2x1 **3)** 1+1.5)

1) Posons $\alpha = \frac{113\pi}{6}$, $\beta = -\frac{63\pi}{8}$et $\gamma = \frac{77\pi}{12}$. En détaillant vos calculs, évaluer les cosinus et sinus de ces trois angles.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $\tan(2x - \frac{\pi}{3})$=-1,

b) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes:

a) $\cos(3x) < \frac{1}{2}$,

b) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) > \sin\left(\frac{x}{4}\right)$.

Exercice n°2 (Trigonométrie) (4 points: **1)** 1 **2) a)** 1 **b)** 1 **c)** 1)

1) Sans utiliser la moindre approximation, montrer que $\frac{\sqrt{5}-1}{4} \in [0, 1]$.

2) Il existe donc un seul réel $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ satisfaisant $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

a) Exprimer cos(4x) uniquement en fonction de sin(x), pour tout réel x.

b) Montrer que $\cos(4\theta) = \sin(\theta)$.

c) Déduire de a) et b) la valeur exacte de θ.

Exercice n°3 (Nombres complexes) (6.5 points: **1)** 2x1 **2) a)** 1.5 **b)** 1.5 **c)** 1.5)

1) Déterminer la forme algébrique des complexes suivants:

$a = \frac{(3-i)^2}{1+i}$, $b = \frac{2+i}{3+i} - \frac{3-i}{2-i}$.

2) Posons $P(z) = i z^3 + (2i - 1) z^2 - (4 + i) z - 3 + 6i$.

a) Montrer en l'évaluant qu'il existe un unique réel α tel que $P(\alpha) = 0$.

b) En déduire une factorisation de P.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

<u>Exercice n°4 (Nombres complexes)</u> (3.5 points)

Soient a et b deux complexes distincts de module 1. Pour tout complexe z, posons:

$$E(z) = \frac{z + a\,b\,\bar{z} - a - b}{a - b}$$

Montrer que $E(z)$ est imaginaire pur $\forall\, z \in \mathbb{Z}$.