Correction du Devoir surveillé n° 2

Exercice 1 On considère la fonction $f:\ x \longmapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$. Si $x > 1$ alors $x-1>0$ et $\dfrac{x}{x-1} > 0$.

   De plus, $u:\ x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables. Donc $x \longmapsto x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

   Donc $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur l'intervalle }]1,+\infty[}$ et $\forall x > 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[1\times\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + x \times \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right]\mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + x\times\frac{-1}{(x-1)^2}\times\frac{x-1}{x}\right]f(x). \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\forall x>1, \quad f'(x) = \left[\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x-1}\right]f(x)}$.

2. (a) φ est dérivable sur $]1,+\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et $\forall x > 1$,

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x(x-1)} - \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)+x}{x(x-1)^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}} > 0,$$

   car $x>0$ et $(x-1)^2>0$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement croissante sur l'intervalle }]1,+\infty[}$.

   (b) En $+\infty$: $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Donc $\boxed{\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$, par composition et opérations sur les limites.

   φ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\boxed{\forall x>1,\ \varphi(x)<0}$.

3. $\forall x>1$, $f'(x) = \varphi(x)f(x) < 0$ car $\varphi(x)<0$ et $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} > 0$.

   Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]1,+\infty[}$.

4. En 1 : $\dfrac{x}{x-1} \underset{x\to1_+}{\longrightarrow} +\infty$ car $x-1 \geqslant 0$. Donc $\boxed{f(x) \underset{x\to1_+}{\longrightarrow} +\infty}$, par composition et opérations sur les limites.

5. (a) $\displaystyle\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

(b) $x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = x\ln\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}\right) = -x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ en posant $u = -\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

D'après le résultat précédent, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}}$ par composition des limites.

6. La courbe C_f admet une asymptote d'équation $x = 1$ d'après la question 4. et une asymptote d'équation $y = \mathrm{e}$ en $+\infty$ d'après la question 5.(b).

Exercice 2 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1. On pose $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$ et considère les points M_k d'affixes $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(a) La transformation du plan qui a pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} z$ est $\boxed{\text{la rotation de centre O, d'angle } \theta_n.}$

(b) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_{k+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} z_k$ donc le point M_{k+1} est l'image du point M_k par la rotation de centre O, d'angle θ_n.

Or une rotation conserve les distances donc $\boxed{M_kM_{k+1} = M_{k+1}M_{k+2} \text{ pour tout } k \in [\![0, n-3]\!].}$

Le polygone $M_0M_1\cdots M_{n-1}$ est alors un $\boxed{\text{polygone régulier.}}$

(c) $M_0M_k = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_n} - 1\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right| \left|2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right|$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ (formule de l'angle moitié).

Or, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{k\pi}{n} \in [0\ ,\ \pi]$ donc $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$ et

$$\boxed{M_0M_k = 2\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}$$

(d) $S_n = M_0M_1 + M_0M_2 + \cdots M_0M_{n-1} = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ en ajoutant 0.

$S_n = 2\ \mathrm{Im}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} = 2\ \mathrm{Im}\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}}$ car $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} \neq 1$

Or $\dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\left(-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{2n}-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

Donc $S_n = 2\dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \boxed{2\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2\mathrm{cotan}\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)}$

2. $z^n = \overline{z} \Leftrightarrow z = 0$ ou $r^n e^{in\theta} = re^{-i\theta}$ en posant $z = re^{i\theta}$
$\Leftrightarrow r^{n-1}e^{i(n+1)\theta} = 1 (n \geqslant 3) \Leftrightarrow r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{n+1}, k \in [\![0, n]\!]$
L'ensemble des solution est $\boxed{\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in [\![0, n]\!]\right\} \cup \{0\}}$

Exercice 3 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{C}\backslash\{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array} \right.$

1. (a) Soit $z' \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, z' = \dfrac{z-i}{z+i}, z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \Leftrightarrow z'(z+i) = z - i, z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \Leftrightarrow$
$z(z'-1) = -i - iz', z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\} \Leftrightarrow z = \dfrac{i(z'+1)}{1-z'}$ pour tout $z' \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$
L'application f réalise donc une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et
$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : B & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-i\} \\ z & \mapsto & \dfrac{i(z+1)}{1-z} \end{array}$$
(b) $f(z) \neq -i \Leftrightarrow z \neq f^{-1}(-i) = 1$ donc l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$ est $\mathbb{C} \setminus \{1, -i\}$
$f \circ f$ est également bijective, comme composée de 2 applications bijectives, de $\mathbb{C} \setminus \{1, -i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1, -i\}$ car $f(1) = -i$

2. (a) $z' \in \mathbb{U}, z' \neq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z - i| = |z + i|$ Ce qui équivaut à dire que le point $M(z)$ appartient à la médiatrice du segment $[EF]$ où $E(i)$ et $F(-i)$ qui est l'axe des abscisses. Donc $\boxed{f^{-1}(\mathbb{U}\backslash\{1\}) = \mathbb{R}}$.
(b) De ce qui précède, on déduit que l'application $f_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{U}\backslash\{1\}$ est bien définie et surjective. De plus, f est injective donc $f_{|\mathbb{R}}$ est aussi injective. Finalement, $\boxed{f_{|\mathbb{R}} \text{ est bijective}}$.

3. (a) $f(z) = z \Leftrightarrow \dfrac{z-i}{z+i} = z \Leftrightarrow z - i = z^2 + iz, z \neq -i \Leftrightarrow z^2 + (i-1)z + i = 0, z \neq -i$
$\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i = 6e^{-\frac{i\pi}{2}} = \delta^2 \Leftrightarrow \delta = \pm\sqrt{6}e^{-\frac{i\pi}{4}}$
$$z_1 = \frac{1 - i + \sqrt{6}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \boxed{\frac{1 + \sqrt{3} - i(1 + \sqrt{3})}{2}}$$
$$z_2 = \frac{1 - i - \sqrt{6}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \boxed{\frac{1 - \sqrt{3} - i(1 - \sqrt{3})}{2}}$$
$\boxed{f \text{ admet exactement deux points invariants d'affixes } z_1 \text{ et } z_2.}$
(b) $f(e^z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow f(e^z) = -\overline{f(e^z)}$ et $e^z \neq -i$
Or $e^z = -i = e^{-\frac{i\pi}{2}} \Leftrightarrow z = -\dfrac{i\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$

$f(\mathrm{e}^z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{i}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{i}} = -\dfrac{\mathrm{e}^{\overline{z}} + \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\overline{z}} - \mathrm{i}}$
$\Leftrightarrow (e^z - \mathrm{i})(\mathrm{e}^{\overline{z}} - \mathrm{i}) = -(\mathrm{e}^{\overline{z}} + \mathrm{i})(\mathrm{e}^z + \mathrm{i})$
$\Leftrightarrow 2(\mathrm{e}^{z+\overline{z}} - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 1 = 0$ en posant $z = x + \mathrm{i}y$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1$ et $z \neq -\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2} + 2\mathrm{i}k\pi, k \in \mathbb{Z}$
L' ensemble des nombres complexes z tels que $f(\mathrm{e}^z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ est
$\boxed{\mathrm{i}\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{\mathrm{i}\pi}{2} + 2\mathrm{i}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

Exercice 4

1. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = \dfrac{2 \times (-x)}{1 + (-x)^2} = -h(x)$. Donc $\boxed{h \text{ est impaire}}$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$:

   $$h'(x) = \frac{2\left(1 + x^2\right) - 2x\,(2x)}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} = \frac{2\,(1 - x)\,(1 + x)}{\left(1 + x^2\right)^2},$$

   qui est du signe de $(1 - x)\,(1 + x)$ car $2 > 0$ et $1 + x^2 > 0$.

   h est une fraction rationnelle donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x^2} = 0$.
   Comme h est impaire, $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$h(x) = 1 \Longleftrightarrow \frac{2x}{1 + x^2} = 1 \underset{1+x^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} 2x = 1 + x^2 \Longleftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

   Comme h est impaire, $h(x) = -1 \Longleftrightarrow x = -1$. Finalement,

   $\boxed{\text{l'unique antécédent de 1 par } h \text{ est 1, et l'unique antécédent de } -1 \text{ par } h \text{ est } -1}$.

2. (a) Notons que $g(x) = \arcsin(h(x)) - 2\arctan(x)$.

   D'après la question 1. (b), la fonction h admet pour maximum 1 et pour minimum -1. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) \in [-1, 1]$. La fonction arcsin étant définie sur $[-1, 1]$, la fonction $\arcsin(h)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$, comme somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

D'après la question 1. (c), $h(x) \in \{-1, 1\} \iff x \in \{-1, 1\}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, $h(x) \in]-1, 1[$. La fonction arcsin étant dérivable sur $]-1, 1[$, la fonction arcsin(h) est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, comme composée de fonctions dérivables.

La fonction arctan étant dérivable sur $\mathbb{R}$, $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $g(-x) = \arcsin(h(-x)) - 2\arctan(-x) = -g(x)$, car les fonctions h, arcsin et arctan sont impaires. Donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

(c) $g(0) = \arcsin(g(0)) - 2\arctan(0) = \arcsin(0) - 2\arctan(0) = 0 - 2 \times 0 = 0$.

$g(1) = \arcsin(g(1)) - 2\arctan(1) = \arcsin(1) - 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2} - 2 \times \dfrac{\pi}{4} = 0$.

$g(\sqrt{3}) = \arcsin(g(\sqrt{3})) - 2\arctan(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\arctan(\sqrt{3})$. Donc

$g(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3} - 2 \times \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}$.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^2(x) \leq 1$ et $\sqrt{1 - h^2(x)} = \sqrt{\dfrac{1 - 2x^2 + x^4}{(1 + x^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{(1 - x^2)^2}{(1 + x^2)^2}}$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1 - h^2(x)} = \dfrac{|1 - x^2|}{1 + x^2}}$, car $1 + x^2 > 0$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$:

$$g'(x) = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 - h^2(x)}} - \frac{2}{1 + x^2} = \frac{2\left(1 - x^2\right)}{\left(1 + x^2\right)^2} \times \frac{1 + x^2}{|1 - x^2|} - \frac{2}{1 + x^2}.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\},\ g'(x) = \dfrac{2\left(1 - x^2\right) - 2|1 - x^2|}{\left(1 + x^2\right)|1 - x^2|}}$.

(c) Si $x \in]-1, 1[$ alors $x^2 < 1$, donc $|1 - x^2| = 1 - x^2$ et $g'(x) = 0$.

Donc g est constante sur $]-1, 1[$. De plus, $g(0) = 0 = g(1) = g(-1)$ (g est impaire).

Finalement, $\boxed{g \text{ est nulle sur } [-1, 1]}$.

(d) Si $x \in]1, +\infty[$ alors $x^2 > 1$, donc $|1 - x^2| = x^2 - 1$ et

$g'(x) = \dfrac{-4\left(x^2 - 1\right)}{\left(1 + x^2\right)\left(x^2 - 1\right)} = -4\arctan'(x)$.

Donc $(g+4\arctan)' = g' + 4\arctan'$ est nulle sur $]1,+\infty[$ et $g+4\arctan$ est constante sur $]1,+\infty[$.

$g(\sqrt{3}) + 4\arctan(\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3} + 4\times\dfrac{\pi}{3} = \pi$ et $g(1)+4\arctan(1) = 0 + 4\times\dfrac{\pi}{4} = \pi$.

Finalement, $g(x)+4\arctan(x) = \pi$ sur $[1,+\infty[$, et
$\boxed{\forall x\in[1,+\infty[,\ g(x) = \pi - 4\arctan(x)}$.

(e) Si $x \in]-\infty,-1]$ alors $-x\in[1,+\infty[$ et, comme g est impaire, on a :

$$g(x) = -g(-x) = -\pi + 4\arctan(-x).$$

Comme arctan est impaire, $\boxed{\forall x\in]-\infty,-1],\ g(x) = -\pi - 4\arctan(x)}$.

4. Sur $[1,+\infty[$, $g = \pi - 4\arctan$ est décroissante car arctan est croissante et $-4<0$.

   En $+\infty$, $g(x) = \pi - 4\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pi - 4\times\dfrac{\pi}{2} = -\pi$, par opérations sur les limites.

   Comme g est impaire, de ce qui précède, on déduit l'allure du graphe de g :