Samedi 8 novembre 2025

Devoir surveillé n° 2

Ce devoir est constitué de quatre exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **8,5 points** : **1.** 1.5 **2. (a)** 1.5 **2.(b)** 1.5 **3.** 0.5 **4.** 1 **5.(a)** 0.5 **5.(b)** 1 **6.** 1

On considère la fonction $f\,:\; x \longmapsto \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ puis calculer sa dérivée f'.
2. Pour $x > 1$, on pose $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) - \dfrac{1}{x-1}$
   (a) Calculer $\varphi'(x)$. En déduire le sens de variation de φ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
   (b) Calculer la limite de φ en $+\infty$. En déduire le signe de φ sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
3. Déterminer les variations de f sur $]1,+\infty[$.
4. Déterminer la limite de f en 1.
5. (a) Rappeler la valeur de la limite en 0 de la fonction $u \longmapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$.
   (b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
6. La courbe C_f admet-elle une ou plusieurs asymptotes ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 **8,5 points** : **1.(a)** 1 **1.(b)** 1.5 **1.(c)** 1.5 **1.(d)** 2.5 **2.** 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On pose $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$ et considère les points M_k d'affixes $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta_n}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (a) Quelle est la transformation du plan qui a pour écriture complexe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n} z$?
   (b) En déduire que $M_k M_{k+1} = M_{k+1} M_{k+2}$ pour tout $k \in [\![0, n-3]\!]$.
   Quelle est la nature du polygone $M_0 M_1 \cdots M_{n-1}$?
   (c) Calculer $M_0 M_k$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (d) En déduire la valeur de $S_n = M_0M_1 + M_0M_2 + \cdots M_0M_{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} M_0M_k$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = \overline{z}$.

Exercice 3 **9 points** : **1.(a)** 1.5 **1.(b)** 1.5 **2.(a)** 1 **2.(b)** 1 **3.(a)** 2 **3.(b)** 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On considère la fonction $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} \end{array} \right.$

1. (a) Montrer que l'application f réalise une bijection.
   (b) Quel est l'ensemble de définition de l'application $f \circ f$? Montrer qu'elle réalise une bijection sur un ensemble à déterminer.

2. On rappelle que $\mathbb{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.
   (a) Montrer que l'image réciproque de $\mathbb{U}\backslash\{1\}$ par f est $\mathbb{R}$.
   (b) La restriction de f à $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{U}\backslash\{1\}$ est-elle bijective ?

3. (a) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   (b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(\mathrm{e}^z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

Exercice 4 **14 points** : **1.(a)** 0.5 **1.(b)** 2.5 **1.(c)** 1 **2.(a)** 1.5 **2.(b)** 1 **2.(c)** 1.5 **3.(a)** 1.5 **3.(b)** 1 **3.(c)** 1 **3.(d)** 1 **3.(e)** 0.5 **4.** 1

On considère les fonctions $g : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - 2\arctan(x)$
et h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1. (a) Étudier la parité de la fonction h.

   (b) Étudier les variations et les limites de la fonction h. Dresser son tableau de variation.

   (c) Déterminer les antécédents de -1 et de 1 par h.

2. (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

   (b) Montrer que la fonction g est impaire.

   (c) Donner les valeurs de $g(0)$, $g(1)$, $g\left(\sqrt{3}\right)$.

3. (a) Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{1 - h^2(x)} = \dfrac{\left|1 - x^2\right|}{1 + x^2}$

   (b) Calculer alors $g'(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

   (c) Justifier que g est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$.

   (d) Démontrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $g(x) = \pi - 4\,\mathrm{Arctan}(x)$.

   (e) En déduire l'expression de $g(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, -1]$.

4. Tracer l'allure du graphe de g.