Correction du devoir maison n° 6

Exercice 1 Le but de cet exercice est de calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+3+\cdots+k}, n \in \mathbb{N}^*$.

1. On sait que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ donc $u_k = \frac{1}{1+2+3+\cdots+k} = \frac{2}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,par télescopage, d'où $\boxed{S_n = \frac{2n}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

Exercice 2 Le but de cet exercice est de calculer $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

1. $A_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n}$ par télescopage.
2. $B_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{2}$ par télescopage.
3. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = A_n B_n$ donc $\boxed{P_n = \frac{n+1}{2n}}$

Exercice 3 1. $\begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3+2m)x = 8 & 2L_1 + L_2 \\ (3+2m)y = 3 - 6m & 3L_1 - mL_2 \end{cases}$

Si $m \neq -\frac{3}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{8}{3+2m} \\ y = \frac{3-6m}{3+2m} \end{cases}$ Pour $m = -\frac{3}{2}, S = \emptyset$

2. $\begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ 4x - 5y - 3z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2z = -b & -L_2 \\ 3y + 5z = a + 2b & L_1 + 2L_2 \\ 3y + 5z = c + 4b & L3 + 4L_2 \end{cases}$

Si $a + 2b \neq c + 4b$ alors $\boxed{\text{le système n'a pas de solution.}}$

Si $a + 2b = c + 4b$ i.e $a = c + 2b$ alors l'ensemble des solutions correspond à la droite de représentation paramétrique :

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b - \frac{4}{3}t \\ y = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{5}{3}t & t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}}$$