Correction du devoir maison n° 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t$$

1. $g : t \mapsto \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$. g est définie et dérivable pour tout t tel que $t+\sqrt{t^2+1} > 0$

   Or $t+\sqrt{t^2+1} > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et si $t \leqslant 0$, $\sqrt{t^2+1} > |t| = -t$ donc $t+\sqrt{t^2+1} > 0$.

   $\boxed{g \text{ est alors définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$ et

   $$g'(t) = \frac{1+\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}} = \frac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}(t+\sqrt{t^2+1})} \boxed{= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}}$$

2. $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \int_0^1 g'(t)\mathrm{d}t = [g(t)]_0^1 \boxed{= \ln(1+\sqrt{2})}$

3. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 \boxed{= \sqrt{2}-1}$

4. Pour tout entier naturel n, $I_{n+2}+I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}+t^n}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t$ par linéarité.

   Or $\dfrac{t^{n+2}+t^n}{\sqrt{t^2+1}} = \dfrac{t^n(t^2+1)}{\sqrt{t^2+1}} = t^n\sqrt{t^2+1}$ pour tout t

   Donc $\boxed{I_{n+2}+I_n = J_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^n\sqrt{t^2+1} \boxed{= \sqrt{2}-(n+1)J_n}$ par intégration par parties

   en posant $u = t^{n+1}$ et $v' = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ $u' = (n+1)t^n$ et $v = \sqrt{t^2+1}$, u et v étant c^1 sur $\mathbb{R}$

6. d'après la question précédente, $J_n = \dfrac{\sqrt{2}-I_{n+2}}{n+1}$

   Or $I_{n+2}+I_n = J_n$ ce qui donne $I_{n+2} = J_n - I_n = \dfrac{\sqrt{2}-I_{n+2}}{n+1} - I_n$

   donc $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) I_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n$ puis

   $\dfrac{n+2}{n+1} I_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} - I_n$ d'où $\boxed{I_{n+2} = \dfrac{\sqrt{2}}{n+2} - \dfrac{n+1}{n+2} I_n}$

   $I_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}I_0 \boxed{= \dfrac{\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})}{2}}$ et $I_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3} - \dfrac{2}{3}I_1 \boxed{= \dfrac{2-\sqrt{2}}{3}}$