

## Devoir maison n° 9

A rendre le jeudi 4 décembre 2025

L'objectif de cet exercice est de déterminer les fonctions  $y$  de la variable réelle  $x$  définies et deux fois dérivables sur l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$ , solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + x y' + 9y = x^2$$

On note  $(H)$  l'équation homogène associée à  $(E)$   $(H) : x^2 y'' + x y' + 9y = 0$ .

1. Déterminer une fonction polynomiale  $\varphi$  solution particulière de  $(E)$  sur  $I$ .

2. Pour  $x \in I$ , on pose  $t = \ln(x)$ .

Si  $f$  est une fonction deux fois dérivable sur  $I$ , on pose  $g(t) = f(e^t)$ , pour tout réel  $t$ .

(a) Montrer que la fonction  $g$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

(b) Pour tout réel  $t$ , calculer  $g'(t)$  et  $g''(t)$ .

(c) Montrer alors que la fonction  $f$  est solution de  $(H)$  sur  $I$  si, et seulement si,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $g''(t) + 9g(t) = 0$ .

(d) Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $(H_1) : y'' + 9y = 0$  puis en déduire les solutions à valeurs réelles de l'équation  $(H)$ .

3. Déterminer toutes les fonction solutions à valeurs réelles de  $(E)$  sur  $I$ .