

Devoir maison n° 9

A rendre le jeudi 4 décembre 2025

L'objectif de cet exercice est de déterminer les fonctions y de la variable réelle x définies et deux fois dérивables sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$(E) : x^2 y'' + x y' + 9 y = x^2$$

On note (H) l'équation homogène associée à (E) $(H) : x^2 y'' + x y' + 9 y = 0.$

1. Déterminer une fonction polynomiale φ solution particulière de (E) sur I .

2. Pour $x \in I$, on pose $t = \ln(x)$.

Si f est une fonction deux fois dérivable sur I , on pose $g(t) = f(e^t)$, pour tout réel t .

(a) Montrer que la fonction g est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

(b) Pour tout réel t , calculer $g'(t)$ et $g''(t)$.

(c) Montrer alors que la fonction f est solution de (H) sur I si, et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g''(t) + 9g(t) = 0$.

(d) Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $(H_1) : y'' + 9y = 0$ puis en déduire les solutions à valeurs réelles de l'équation (H) .

3. Déterminer toutes les fonction solutions à valeurs réelles de (E) sur I .