Primitives

Exercice 1 Déterminer les primitives de f en précisant sur quel(s) intervalle(s) elles sont valides.

1. $f : x \mapsto 3\tan^2(x) - 1$
2. $f : x \mapsto x^3\sqrt{2+x^4}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$
4. $f : x \mapsto \dfrac{2x+5}{(x^2+5x+8)^4}$
5. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{1/x^2}}{x^3}$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

Exercice 2 Déterminer le domaine de définition de F, étudier ses variations et son signe.

1. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (t+2)\ln^3(t+1)\mathrm{d}t$
2. $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$.

Exercice 3 1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(2x)\sin(x)\mathrm{d}x$.

2. Soit $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$.

Calculer $J+K$, $J-K$, puis J et K.

Exercice 4 Déterminer la primitive de f qui s'annule en a :

1. $f : x \mapsto x^n\ln(x)$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $a = 1$
2. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x\cos(nx)$, $n \in \mathbb{Z}^*$, $a = \pi$
3. $f : x \mapsto (1+x-2x^2)\mathrm{e}^{-2x}$, $a = 0$.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x,\ \ x = \ln(t)$ $\qquad J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t,\ \ x = \tan(t)$

2. $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t+t(\ln t)^2}\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$. $\qquad L = \displaystyle\int_2^7 \frac{\sqrt{2+t}}{1+t}\,\mathrm{d}t,\ \ t = v^2-2$.

Pour L, on cherchera des réels a, b et c tels que $\forall v \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, $\dfrac{2v^2}{v^2-1} = a + \dfrac{b}{v-1} + \dfrac{c}{v+1}$.

Exercice 6 Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de f sur I.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x-2}$ et $I =]1, +\infty[$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-x+1}$ et $I = \mathbb{R}$
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^4-2x}{x-2}$ et $I =]2, +\infty[$.
4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+4x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+1}$ sur $I =]-1, +\infty[$ 6. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+2x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{t^2+1}}dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n\sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right)$.
2. En déduire I_0.
3. Calculer I_1.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $I_{n+2} + I_n = J_n$.
5. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)J_n$$

6. Déduire des questions précédentes une expression de I_{n+2} en fonction de I_n, puis calculer I_2 et I_3.