Correction du devoir maison n° 8

Exercice 1

1. Soit $m \in \mathbb{R}$

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & m \end{array}\right., \quad \text{de paramètre } m \text{ et d'inconnues } x,\ y \text{ et } z.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & z & = & m \qquad L_1 \leftrightarrow L_4 \\ & & & & (m-1)y & = & 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ & & & & (m-1)z & = & 1-m \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ & & (1-m)y & + & (1-m)z & = & 1-m^2 \qquad L_4 \leftarrow L_1 - mL_4 \end{array}\right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & y & + & z & = & m \\ & & & & (m-1)y & = & 0 \\ & & & & (m-1)z & = & 1-m \\ & & & & 0 & = & 2-m-m^2 \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que (S) est compatible ssi $2-m-m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -2$

$\boxed{(S) \text{ est incompatible ssi } m \in \mathbb{R}\backslash\{-2, 1\}}$.

2. Si $m = -2$

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & -2 \\ & & -3y & & & = & 0 \\ & & & & -3z & = & 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, le système (S) admet une unique solution et $\boxed{S = \{(-1, 0, -1)\}}$.

Si $m = 1$

$(S) \Longleftrightarrow x + y + z = 1$. Dans ce cas, le système (S) admet une infinité de solutions et $\boxed{S = \{(1-y-z, y, z),\ (y, z) \in \mathbb{R}^2\}}$.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, donc la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui l'est et qui ne s'annule pas.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral, f_n admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, et celle-ci est définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t}.$$

2. $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^x$. Donc $\boxed{F_1(x) = \arctan(x)}$.

3. On pose $t = \tan(u)$. La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   De plus, $0 = \tan(0)$, $1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\mathrm{d}t = (1+\tan^2(u))\mathrm{d}u$.

   Par la formule de changement de variable, on a :

   $$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2(u)}{(1+\tan^2(u))^2}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(u)}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u)\mathrm{d}u.$$

   Donc $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$. Donc $\boxed{I = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = (1+t^2)^{-n}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

   $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$.

   Donc, par intégration par parties et par linéarité de l'intégrale, on a :

   $$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$

   Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \quad (1)}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a :

   $$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \quad (2).$$

   Par (1) et (2), on a : $F_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x)$.

   Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}}$.

6. Si $n = 1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$: $2F_2(x) = F_1(x) + \dfrac{x}{1+x^2} = \arctan(x) + \dfrac{x}{1+x^2}$.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(\arctan(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\right)}$.

   On retrouve ainsi que $I = F_2(1) = \dfrac{1}{2}\left(\arctan(1) + \dfrac{1}{1+1^2}\right) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$, car $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.