Correction du test n° 9

Sujet A

1. $(E):\quad (x^2+1)y'+2xy=3x^2+1$ sur $I=\mathbb{R}$.

   $(E) \Leftrightarrow y'+\dfrac{2x}{x^2+1}\,y=\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$ car $x^2+1\neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

   $y_H=C\mathrm{e}^{-\ln(x^2+1)}=\dfrac{C}{x^2+1}$

   MVC : $C'=\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}(x^2+1)=3x^2+1$

   d'où $C=x^3+x$ et $y_P=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}=x$

   $\boxed{y=\dfrac{x^3+x+C}{x^2+1}, C, x\in\mathbb{R}}$

2. $(E_1):\quad y''-6\mathrm{i}y'-9y=0$ sur $I=\mathbb{R}$.

   $\Delta=0 \qquad r_0=3\mathrm{i}$

   $\boxed{y=(Ax+B)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}A, B\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{R}}$

3. $(E_1):\quad y''-y'-2y=3e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$ L'équation caractéristique est $r^2-r-2=0$, qui a pour solutions -1 et 2.

   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

   $y(x)=Ae^{-x}+Be^{2x}$, avec $A, B\in\mathbb{R}$.

   $\lambda=-1$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x)=kxe^{-x}$.

   On a $u'(x)=-kxe^{-x}+ke^{-x}=k(1-x)e^{-x}$ et

   $u''(x)=-ke^{-x}-k(1-x)e^{-x}=k(2-x)e^{-x}$,

   donc pour que $u''(x)-u'(x)-2u(x)=e^{-x}$, il faut choisir $k=-1$.

   Donc $u(x)=-xe^{-x}$ et $\boxed{g(x)=Ae^{-x}+Be^{2x}-xe^{-x}, A, B, x\in\mathbb{R}}$

Correction du test n° 9

Sujet B

1. (E) : $\quad y'\sin x + y\cos x + 1 = 0$ sur $I =]0, \pi[$.

   $(E) \Leftrightarrow y' + \dfrac{\cos x}{\sin x}y = \dfrac{-1}{\sin x}$

   $y_H = C\mathrm{e}^{-\ln|\sin x|} = \dfrac{C}{\sin x}$ car sur $I =]0, \pi[$, $\sin x > 0$

   MVC $C' = \dfrac{-1}{\sin x}\sin x = -1$ donc $C = -x$ et $y_P = \dfrac{-x}{\sin x}$

   $\boxed{y = \dfrac{C - x}{\sin x}, C \in \mathbb{R}, x \in I}$

2. (E_1) : $\quad y'' + 6y' - 9y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $\Delta = 72 \qquad r_1 = -3 + 3\sqrt{2} \qquad r_1 = -3 - 3\sqrt{2}$

   $\boxed{y = A\mathrm{e}^{(-3+3\sqrt{2})x} + B\mathrm{e}^{(-3-3\sqrt{2})x} A, B \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}}$

3. (E_2) : $\quad y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et -2.

   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

   $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   $\lambda = -2$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x) = kxe^{-2x}$.

   On a $u'(x) = -2kxe^{-2x} + ke^{-2x}$ et $u''(x) = 4kxe^{-2x} - 4ke^{-2x}$,

   donc pour que $u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = 2e^{-2x}$, il faut choisir $k = -2$.

   Donc $u(x) = -2xe^{-2x}$ et $\boxed{g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} - 2xe^{-2x}, A, B, X \in \mathbb{R}.}$