DS3 de Mathématiques - 2 heures

samedi 13 décembre 2025

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (7 points)

Partie 1 (4 points:**0)** 0.5+1 **1)** 1 **2)** 0.5 **3)** 1)

Soit θ un angle différent de 0 modulo π. Posons $A_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $B_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$.

1) Calculer $A_n(\theta) + B_n(\theta)$ et linéariser $A_n(\theta) - B_n(\theta)$.

2) Que vaut $\sum_{k=0}^{n} e^{2ik\theta}$? (on donnera sa forme algébrique)

3) À l'aide du **2)** évaluer $A_n(\theta) - B_n(\theta)$ en fonction de n et θ.

4) Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $A_n(\theta)$ et $B_n(\theta)$.

Partie 2 (3 points:**0)** 4x0.25 **1)** 2)

Posons

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i - j|$$

0) Évaluer S_1, S_2, S_3 et S_4.

1) Que vaut S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

Exercice n°2 (4.5 points:**0)** 1 **1)** 2 **2)** 0.5 **3)** 1)

Dans ce qui suit, chaque question sera traitée en discutant éventuellement en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$. Les inconnues y sont à valeurs réelles.

0) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 2\alpha y' + (1 + \alpha^2) y = 0$ (H_α).

1) Trouver une solution particulière de (E_α): $y'' + 2\alpha y' + (1 + \alpha^2) y = e^{-\alpha x} \cos(x)$.

2) Déduire de **0)** et **1)** l'ensemble des solutions à valeurs réelles de (E_α).

3) Résoudre le problème de Cauchy $y'' + 2\alpha y' + (1 + \alpha^2) y = e^{-\alpha x} \cos(x)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

<u>Exercice n°3</u> (3.5 points:**0)** 1 **1)** 1 **2)** 0.5 **3)** 1)

Dans cet exercice, l'inconnue y est une fonction de la variable réelle à valeurs réelles.

0) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \sin(x)\, y = 0$ (H).

1) À l'aide d'un changement de variable, obtenir une primitive de $e^{-\cos(x)} \sin(x) \cos(x)$.

2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \sin(x)\, y = \sin(2\,x)$ (E)

3) Résoudre le problème de Cauchy $y' + \sin(x)\, y = \sin(2\,x)$ avec $y(\frac{\pi}{2})$=0.

<u>Exercice n°4</u> (5 points: **1)** 1 **2)** 0.5 **3)** 1 **4)** 1 **5)** 0.5+1)

Pour tout réel λ, considérons le système linéaire S_λ:$\begin{cases} x + y + \lambda\, z & = 1 \\ \lambda\, x + y + z & = 1 \\ 3\,x + (\lambda + 2)\, y + (2\,\lambda + 1)\, z & = 3 \end{cases}$.

Utiliser fidèlement la méthode du pivot de Gauss afin de résoudre S_λ pour toute valeur réelle de λ . On construira dans chaque cas la forme échelonnée réduite associée. Ce faisant, on traitera clairement les questions suivantes:

1) Décrire, en fonction de λ, le nombre de pivots contenus par le système.

2) Pour quelles valeurs de λ ce système est-il compatible?

3) Décrire son ensemble de solutions lorsque λ=1.

4) Décrire son ensemble de solutions lorsque λ=-2.

5) Pour quelles valeurs de λ ce système admet une unique solution? Quelle est-elle?