Correction du devoir maison n° 9

$$(E) : x^2\, y'' + x\, y' + 9\, y = x^2$$

On note (H) l'équation homogène associée à (E) $\quad (H) : x^2\, y'' + x\, y' + 9\, y = 0.$

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : x \mapsto ax^2 + bx + c$, deux fois dérivable sur I : $\varphi'(x) = 2ax + b$ et $\varphi''(x) = 2a$.
   φ est solution de (E) si, et seulement si, $\forall x \in I$,
   $x^2 (2a) + x (2ax + b) + 9 \left(ax^2 + bx + c\right) = 1 + x^2$.
   On obtient, après développement et identification, $\boxed{\varphi : x \longmapsto \dfrac{1}{13}x^2.}$

2. (a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans I, et f est deux fois dérivable sur I. Par composition, $\boxed{g \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$
   (b) $g'(t) = e^t f'\left(e^t\right)$ et $g''(t) = e^t f'\left(e^t\right) + e^{2t} f''\left(e^t\right)$.
   (c) f est solution de (H) sur I si, et seulement si, $\forall x \in I$, $x^2 f''(x) + x f'(x) + 9 f(x) = 0$.
   En posant $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$, t décrivant $\mathbb{R}$ lorsque x décrit I, on obtient de façon équivalente :
   $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{2t} f''\left(e^t\right) + e^t f'\left(e^t\right) + 9 f\left(e^t\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + 9 g(t) = 0}$
   (d) L'équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$, possède deux racines complexes $r = 3i$ et $\overline{r} = -3i$.
   Les solutions de (H_1) sur $\mathbb{R}$ sont $t \mapsto g(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   Or $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f\left(e^t\right) \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f(x) = g(\ln(x))$.
   Les solutions de (H) sur I sont
   $\boxed{x \mapsto g(\ln(x)) = a \cos(3 \ln(x)) + b \sin(3 \ln(x)),\ \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$

3. Les solutions générales de (E) sur I sont
   $\boxed{x \mapsto \varphi(x) = \dfrac{1}{13}x^2 + a \cos(3 \ln(x)) + b \sin(3 \ln(x)),\ \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$