Primitives

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.

1 Primitives et intégrales d'une fonction continue

1.1 Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition 1. Une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est **une primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Théorème 1. Soit f admettant une primitive F sur I.

1. Les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante.
2. Si $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ alors f admet une unique primitive sur I prenant la valeur y_0 en x_0.

Exemple 1. Déterminer la primitive de $f : x \mapsto x^3 - 2x + 5$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

Notation Dans la pratique, on note $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de f sur I.

primitives usuelles	intervalle I de validité
$\displaystyle\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$ si $a \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x)$	$]-1, 1[$

1.2 Lien entre primitives et intégrales d'une fonction continue

Rappel Si f est continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est la valeur de l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

Théorème 2. Théorème fondamental du calcul intégral Si f est continue sur I, et si $a\in I$. alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I.

Elle vérifie $F(a)=0$. F est dérivable sur I et $\forall x\in I$, $F'(x)=f(x)$.

Exemple 2. Montrer que $F : x\mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t-1}{t^2}\mathrm{d}t$ est définie, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Corollaire 1. Si f est continue sur I alors f admet des primitives sur I.

De plus, si F est une primitive quelconque de f sur I, alors

$$\forall (a,b)\in I^2,\ \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a).$$

Remarque Le résultat ne dépendant pas de x : $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \dots$

Exemple 3. Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t.$

2 Techniques de calcul de primitives ou d'intégrales

2.1 Utiliser la linéarité de l'intégrale ou la relation de Chasles

Propriété 1. Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I et $(a,b,c)\in I^3$.

1. $\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ **Linéarité**
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ **Relation de Chasles**.

Exemple 4. Calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

2.2 Reconnaître la dérivée d'une fonction composée

Propriété 2. Soit f continue sur un intervalle J, de primitive F sur J.

Si u est dérivable sur I, si u' est continue sur I et si $u(I) \subset J$ alors

$G : x \mapsto F(u(x))$ est une primitive de $g : x \mapsto u'(x)f(u(x))$ sur I.

Exemple 5. Déterminer les primitives de g sur I :

a) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ et $I =]-1,1[$ b) $g(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^3}$ et $I = \mathbb{R}$.

Cas particuliers Si $\forall x \in I$, $ax+b \in J$, alors $\displaystyle\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

formules usuelles	conditions de validité
$\displaystyle\int u'(x)(u(x))^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	$u > 0$ si $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, u ne s'annule pas si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln(\lvert u(x)\rvert)$	u ne s'annule pas sur I
$\displaystyle\int u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)}$	
$\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\mathrm{d}x = -\cos(u(x))$	
$\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\mathrm{d}x = \sin(u(x))$	
$\displaystyle\int u'(x)\tan(u(x))\mathrm{d}x = -\ln(\lvert\cos(u(x))\rvert)$	$u(I) \subset]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$, où $k \in \mathbb{Z}$
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}\mathrm{d}x = \arctan(u(x))$	
$\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(u(x))$	$u(I) \subset]-1,1[$

2.3 Intégration par parties

Définition 2. Une fonction u est dite **de classe $\mathscr{C}^1$** sur I si u est dérivable sur I et u' est continue sur I.

Théorème 3. I.P.P. Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$

$$\text{alors } \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x.$$

Remarque Si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, alors $\displaystyle\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 6. Calculer $\displaystyle\int \arctan(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 t^2\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$.

2.4 Intégration par changement de variable

Théorème 4. Changement de variable Soit f continue sur un intervalle J.

Si ϕ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $\phi(I) \subset J$ alors $\forall (a, b) \in I^2$,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, on dit que l'on a effectué le changement de variable $x = \phi(t)$.

Exemple 7. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$.

Remarque : Si f est continue sur J et $\phi : I \to J$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective, alors

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t, \text{ où } \forall (t, x) \in I \times J,\ x = \phi(t) \iff t = \phi^{-1}(x).$$

Exemple 8. Déterminer $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$.

Application : Cas des fonctions paires, impaires ou périodiques :

1. si f est continue sur $[-a, a]$ et paire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;
2. si f est continue sur $[-a, a]$ et impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$;
3. si f est continue sur $\mathbb{R}$ et $T-$périodique alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 9. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^5(t)\mathrm{d}t$.

3 Quelques exemples de calculs de primitives ou d'intégrales

3.1 Fonctions du type $x \mapsto \cos^n(x)\sin^m(x)$, où n et m sont des entiers naturels

On linéarise en utilisant des formules de trigonométrie et/ou les formules d'Euler.

Exemple 10. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2(t)\cos^2(t)\mathrm{d}t$.

3.2 Fonctions du type $x \mapsto P(x)\mathrm{e}ax$, où P est une fonction polynôme

On peut effectuer des IPP successives en dérivant P. On peut aussi chercher une primitive de la forme $x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{ax}$, où Q est un polynôme de même degré que P, par identification.

Exemple 11. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto (x^3 + x)\mathrm{e}^x$.

3.3 Fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$, où a et b sont des réels

On écrit que $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\mathrm{d}x\right)$ et $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\mathrm{d}x\right)$.

Exemple 12. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)$.

3.4 Fonctions rationnelles du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

• Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)^2}$.

Exemple 13. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{3x^2+6x+3}$.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta}$.

Exemple 14. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+5}$.

• Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{a\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]} = \dfrac{1}{a\beta}\dfrac{1/\beta}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}$, où $\beta \neq 0$.

Exemple 15. Déterminer les primitives de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+9}$.