

Correction du Test n° 10

Sujet A

1. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - r - 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r-2) = 0 \Leftrightarrow r = -1$ ou $r = 2$

$$u_n = A(-1)^n + B2^n \text{ avec } u_0 = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

$$u_1 = 1 \Leftrightarrow -A + 2B = 1 \text{ d'où } A = -\frac{1}{3}, B = \frac{1}{3} \text{ et } \boxed{u_n = -\frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{3}}$$

2. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2} \ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ par croissances comparées donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1}$ par composition.

$$3. (S_{a,b}) : \begin{cases} x + y + az = 1 & L_1 \\ ax + (a-1)y + z = 1 & L_2 \\ x + y + z = b+1 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = b+1 & L_3 \rightarrow L_1 \\ (a-1)z = -b & L_1 - L_3 \rightarrow L_2 \\ -y + (1-a)z = 1-ab-a & L_2 - aL_3 \rightarrow L_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 1} \begin{cases} z = \frac{b}{1-a} \\ y = b-1+ab+a & -(L_2 + L_3) \\ x = 2-ab-a-\frac{b}{1-a} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } a = 1} (S_{1,b}) : \begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ x + z = 1 & L_2 \\ x + y + z = b+1 & L_3 \end{cases}$$

Si de plus $b+1 = 1 \Leftrightarrow b = 0$ alors $(S_{1,0}) : \begin{cases} x = 1-z \\ y = 0 \end{cases}$ et si $b \neq 0$ alors $S = \emptyset$

Conclusion $(S_{a,b})$ est compatible pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ sauf si $a = 1$ et $b \neq 0$

Si $a \neq 1$ alors l'ensemble des solutions est un point de coordonnées

$$(2-a-ab-\frac{b}{1-a}, b-1+ab+a, \frac{b}{1-a})$$

Si $a = 1$ et $b = 0$ alors l'ensemble des solutions est $S = \{1-z, 0, z\} \mid z \in \mathbb{R}\}$

Correction du Test n° 10

Sujet B

1. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} - 2u_n$.

L'équation caractéristique s'écrit $r^2 + 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r+1)(r+2) = 0 \Leftrightarrow r = -1$ ou $r = -2$

$$u_n = A(-1)^n + B(-2)^n \text{ avec } u_0 = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

$$u_1 = 1 \Leftrightarrow -A - 2B = 1 \text{ d'où } A = 1, B = -1 \text{ et } \boxed{u_n = (-1)^n - (-2)^n}$$

2. $u_n = n^{-\frac{2}{n^2}} = e^{-\frac{2}{n^2} \ln n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ par croissances comparées donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^0 = 1}$ par composition.

$$3. (S_{a,b}) : \begin{cases} x + y + az = 1 & L_1 \\ ax + (a-1)y + z = 1 & L_2 \Leftrightarrow \\ x + y + z = b+1 & L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = b+1 & L_3 \rightarrow L_1 \\ (a-1)z = -b & L_1 - L_3 \rightarrow L_2 \Leftrightarrow \\ -y + (1-a)z = 1-ab-a & L_2 - aL_3 \rightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 1} \begin{cases} z = \frac{b}{1-a} \\ y = b-1+ab+a & -(L_2 + L_3) \\ x = 2-ab-a-\frac{b}{1-a} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } a = 1} (S_{1,b}) : \begin{cases} x + y + z = 1 & L_1 \\ x + z = 1 & L_2 \\ x + y + z = b+1 & L_3 \end{cases}$$

Si de plus $b+1 = 1 \Leftrightarrow b = 0$ alors $(S_{1,0}) : \begin{cases} x = 1-z \\ y = 0 \end{cases}$ et si $b \neq 0$ alors $S = \emptyset$

Conclusion $(S_{a,b})$ est compatible pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ sauf si $a = 1$ et $b \neq 0$

Si $a \neq 1$ alors l'ensemble des solutions est un point de coordonnées

$$(2-a-ab-\frac{b}{1-a}, b-1+ab+a, \frac{b}{1-a})$$

Si $a = 1$ et $b = 0$ alors l'ensemble des solutions est $S = \{1-z, 0, z\} \mid z \in \mathbb{R}$