Devoir maison n° 10

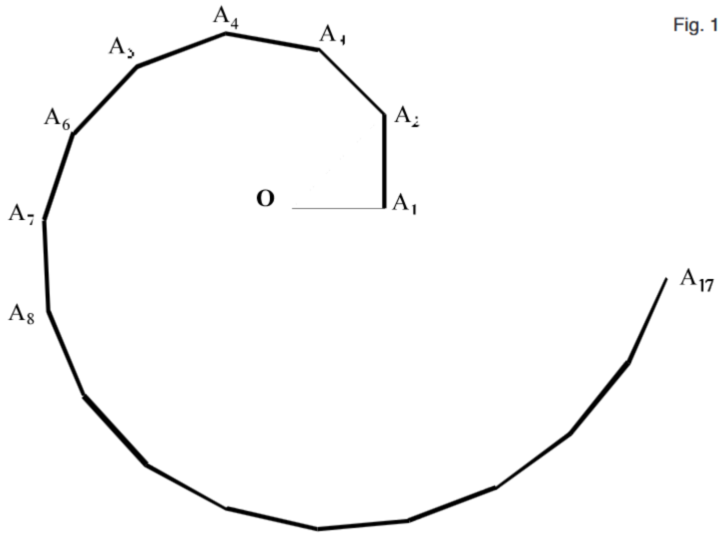
Á rendre le jeudi 20 décembre 2024

Exercice 1 Spirale de Théodore (Théodore de Cyrène fin Ve - déb. IVe siècle av J.C.)

La plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

La spirale de Théodore est une spirale discrète, constituée de points $A_n, n \in \mathbb{N}^*$ tels que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n, et $OA_1 = A_nA_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. C'est sans doute l'une des plus anciennes spirales connue en mathématique.

On note z_n l'affixe du point A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $z_1 = 1$.



1.
2. Le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n donc $\arg\left(\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_n}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, donc il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_n} = \mathrm{i}a \Leftrightarrow z_{n+1}-z_n = \mathrm{i}az_n$
   Ici, les triangles étant rectangles de sens indirect en A_n, on a $a > 0$.
   De plus, $OA_1 = 1 = A_nA_{n+1}$ donc $|z_{n+1}-z_n| = 1 \Leftrightarrow |a\mathrm{i}z_n| = 1 \Leftrightarrow |a| = \dfrac{1}{|z_n|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   On obtient alors $z_{n+1}-z_n = \mathrm{i}az_n = \mathrm{i}\dfrac{z_n}{|z_n|}$ donc $\boxed{z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}\dfrac{z_n}{|z_n|} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$
3. On considère donc la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $z_1 = 1$ et $z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}\,\dfrac{z_n}{|z_n|}$
   Montrons que $|z_n| = \sqrt{n}$ et $\arg(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\ [\pi]$ pour tout $n \geqslant 2$, par récurrence :
   I : Pour $n = 2, |z_2| = \sqrt{2}$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle isocèle OA_1A_2 et $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] = \arctan(1)\ [\pi]$

H : Supposons que $|z_n| = \sqrt{n}$ et $\arg(z_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $[\pi]$ à un rang $n \geqslant 2$

On a alors $|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + |z_{n+1} - z_n|^2$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OA_nA_{n+1} donc $|z_{n+1}|^2 = n+1$ puis $|z_{n+1}| = \sqrt{n+1}$

De plus, on sait que $z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}\,\dfrac{z_n}{|z_n|} = z_n\left(1 + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc

$\arg(z_{n+1}) = \arg(z_n) + \arg\left(1 + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $[2\pi]$

$\arg(z_{n+1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \arg\left(1 + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $[\pi]$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Si on note θ_n un argument de $1 + \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, on a $\cos(\theta_n) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ et

$\sin(\theta_n) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$ donc $\tan(\theta_n) = \dfrac{\sin(\theta_n)}{\cos(\theta_n)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc

$\theta_n = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ $[\pi]$ ce qui conclue l'hérédité.

2.4. Pour le plaisir : généralisons !

Pour construire la spirale de Théodore, nous avons pris une succession de triangles rectangles dont l'un des côtés mesure 1 unité (en langage des nombres complexes, ceci correspond à la transformation $z \longrightarrow z + \dfrac{iz}{|z|}$. Généralisons en prenant, non plus un angle droit, mais un angle quelconque et le côté A_nA_{n+1} quelconque (Soit une transformation de la forme $z \longrightarrow z + b\dfrac{z}{|z|}$ où b est un nombre complexe quelconque). Généralisons encore d'avantage par la transformation $z \longrightarrow az + b\dfrac{z}{|z|}$ où a et b sont deux nombres complexes quelconques. Le lecteur inspiré pourra encore généraliser en prenant par exemple a et b dépendant de n. Les résultats sont parfois spectaculaires. La figure 4 et la figure 5 ci-contre ont été obtenues en prenant : a = exp(iπ/4), b = exp(−iπ/4) (nombre de points : 300) et a = 1 , b = 0,5 . exp(in/2) (nombre de points : 500).

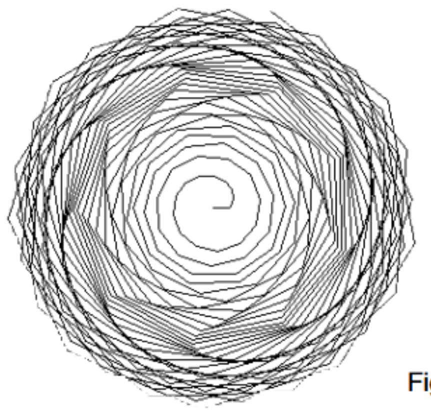


Fig. 4

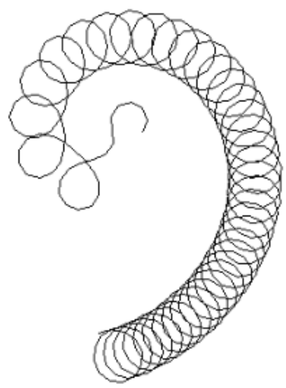


Fig. 5

Exercice 2 On considère la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathrm{u}_n = S_n - 2\sqrt{n}$ et $\mathrm{v}_n = S_n - 2\sqrt{n+1}$.

   (a) $\mathrm{u}_{n+1} - \mathrm{u}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \dfrac{-1-2n+2\sqrt{n}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$
   Or $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^2 = 2n+1-2\sqrt{n}\sqrt{n+1} \geqslant 0$ donc $\mathrm{u}_{n+1} - \mathrm{u}_n \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\boxed{(\mathrm{u}_n) \text{ est décroissante.}}$
   $\mathrm{v}_{n+1} - \mathrm{v}_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \dfrac{3+2n-2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$
   Or $(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})^2 = 2n+3-2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1} \geqslant 0$ donc $\mathrm{v}_{n+1} - \mathrm{v}_n \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\boxed{(\mathrm{v}_n) \text{ est croissante.}}$
   $\mathrm{u}_n - \mathrm{v}_n = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 2\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   donc $\boxed{\text{les suites } (\mathrm{u}_n) \text{ et } (\mathrm{v}_n) \text{ sont adjacentes.}}$

   (b) La suite (u_n) tend vers un réel ℓ et $S_n = u_n + 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

2. Retrouver ce résultat en démontrant que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

Partie A On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé donné sera notée C.

1. $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$ car $x \mapsto 1+x^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x\ln x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1+x^2-2x\ln x}{x(1+x^2)^2}$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

   (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = 2x - (4x\ln x + 2x^2 \times \dfrac{1}{x}) = -4x\ln x$ est du signe de $-\ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$
   $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ par somme.
   $g(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - 2x\ln x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ par produit et somme

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(b) D'après la question précédente, l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]0, 1[$.

Sur $[1, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante, donc g est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1, +\infty[) =]-\infty, 2]$ qui contient 0, donc

$\boxed{\text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution, notée } m\text{,sur } [1, +\infty[\text{ et sur } \mathbb{R}_+^*.}$

4. f' est du signe de g sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après les 2 questions précédentes,

x	0		m		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$ par quotient.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = 1$ par quotient donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$ par produit.

5. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ donc

$\boxed{\text{la courbe } C \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0.}$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc

$\boxed{\text{la courbe } C \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty \text{ d'équation } y = 0.}$

6. $\boxed{f(1) = 0}$ et $f(m) = \dfrac{\ln m}{1 + m^2}$ Or $g(m) = 1 + m^2 - 2m^2 \ln m = 0 \Leftrightarrow \ln m = \dfrac{1 + m^2}{2m^2}$ puis

$f(m) = \dfrac{\dfrac{1 + m^2}{2m^2}}{1 + m^2} = \dfrac{1}{2m^2}$

Partie B On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1 + t^2} \mathrm{d}t.$$

1. (a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, comme quotient de fonctions qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc $F' = f$ est de classe c^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Ainsi,

$\boxed{F \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}_+^*, \text{ et } \forall x > 0,\ F'(x) = f(x)}$.

(b) Soit $x > 0$ fixé. On pose $u = \dfrac{1}{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $t = 1$ alors $u = 1$ et si $t = x$ alors $u = 1/x$.

De plus, $du = -\dfrac{1}{t^2}dt$ donc $-\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$.

Par changement de variable dans l'intégrale, on obtient :
$F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \times \frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(c) $F(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$

Soit $x > 1$ fixé. On a : $\forall t \in [1, x],\ f(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2} \geq 0$.

Donc, par positivité de l'intégrale, $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \geq 0$, $\forall x > 1$.

Si $0 < x < 1$ alors $\dfrac{1}{x} > 1$ et $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$.

Par disjonction des cas, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) \geq 0}$.

Autre justification Si $0 < x < 1, f < 0$ d'après la partie A, donc par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0$, $\forall 0 < x < 1$ puis $F(x) = -\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \geq 0$.

2. φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.
Soit $x > 0$ fixé. On a : $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et $v(t) = \ln t$, $u(t) = \arctan t$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont de classe c^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$F(x) = \Big[\arctan(t)\ \ln(t)\Big]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}\mathrm{d}t = \arctan(x)\ \ln(x) - \int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\mathrm{d}t}$.

3. **Approximation des valeurs de F**

(a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k\ \ln(t)\mathrm{d}t$.

On pose $u'(t) = t^k$ et $v(t) = \ln(t)$, $u(t) = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v'(t) = \dfrac{1}{t}$.

u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, par intégration par parties, on obtient :

$I_k(x) = \left[\dfrac{t^{k+1}\ \ln(t)}{k+1}\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{t^k}{k+1}\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}\ \ln(x)}{k+1} - \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2}\right]_1^x$.

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ I_k(x) = \dfrac{x^{k+1}\ \ln(x)}{k+1} - \dfrac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2}}$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-x^2\right)^k \underset{-x^2\neq 1}{=} \frac{1-\left(-x^2\right)^{n+1}}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} - (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}}$.

(c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On a :

$$\begin{aligned} F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_1^x t^{2k}\ln(t)\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{linéarité}}{=} \int_1^x \ln(t)\left(\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k}\right)\mathrm{d}t \\ &\underset{3.(b)}{=} \int_1^x \ln(t)(-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Par linéarité,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t}.$$

(d) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$ fixés. Comme $x < 1$, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| &= \left|-(-1)^{n+1}\int_x^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\ln(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_x^1 \ln(t)\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_x^1 |\ln(t)|\frac{|t|^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t. \\ &\leq \int_x^1 (-\ln(t))\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

car $\ln(t) < 0$ sur $]0,1[$ et $2n+2$ est un entier naturel pair.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,1[,\ \ \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq \int_1^x \ln(t)\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = I_{2n+2}(x)}$.

(e) Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose $w_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

F est continue en 0 donc $F(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} F(0)$. Vu le résultat de la question question 3.(a),

$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ \ I_k(x) = \frac{x^{k+1}\ln(x)}{k+1} - \frac{x^{k+1}-1}{(k+1)^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{1}{(k+1)^2}$, par croissance comparée.

Donc, en passant à la limite dans l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |F(0) - w_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}}.$$

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons (E_n) l'équation

$$(1 - \mathrm{i}z)^n(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = (1 + \mathrm{i}z)^n(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$$

1. si z est solution de (E_n) alors $(1 - \mathrm{i}z)^n(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = (1 + \mathrm{i}z)^n(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$.
   En prenant le conjugué des deux membres de cette égalité on obtient $\overline{(1 - \mathrm{i}z)^n(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})} = \overline{(1 + \mathrm{i}z)^n(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})}$. En utilisant les propriétés du conjugué, on a alors $(1 + \mathrm{i}\overline{z})^n(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = (1 - \mathrm{i}\overline{z})^n(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$ ce qui implique que $\boxed{\overline{z} \text{ est solution de } (E_n).}$

2. Posons $Z = \dfrac{1 - \mathrm{i}z}{1 + \mathrm{i}z}$. z est solution de (E_n)
   $\Leftrightarrow (1 - \mathrm{i}z)^n(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}) = (1 + \mathrm{i}z)^n(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) \Leftrightarrow \dfrac{(1 - \mathrm{i}z)^n}{(1 + \mathrm{i}z)^n} = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}, z \neq -\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} \Leftrightarrow Z^n = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}} \Leftrightarrow \boxed{Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}, z \neq \mathrm{i}.}$

3. $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ a n racines n ièmes distinctes qui sont $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3n} + \frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]}$

4. $\dfrac{1 - \mathrm{i}z}{1 + \mathrm{i}z} = e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow 1 - \mathrm{i}z = (1 + \mathrm{i}z)e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z\left(-\mathrm{i} - \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\right) = e^{\mathrm{i}\theta} - 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta} - 1}{-\mathrm{i}\left(1 + e^{\mathrm{i}\theta}\right)}$ pour $e^{\mathrm{i}\theta} \neq -1$ i.e $\theta \neq \pi\,[2\pi]$
   $$z = \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - 1}{1 + e^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\frac{2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
   Et pour $\theta = \pi\,[2\pi], 1 - \mathrm{i}z = -1 + \mathrm{i}z \Leftrightarrow 2 = \mathrm{i}z \Leftrightarrow z = \dfrac{2}{\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$

5. $(E_n) \Leftrightarrow Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \Leftrightarrow Z = e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]$
   Et $\theta = \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n} = \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{3} + k\right) = n\,[2n] \Leftrightarrow k = \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3}\,[n]$ ce qui est impossible avec $k \in k \in [\![0, n-1]\!]$
   Les solutions de (E_n) sont alors $\boxed{z = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3n} + \dfrac{k\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]}$

Exercice 5 Soit φ la fonction de la variable complexe à valeurs complexes définie par

$$\varphi(z) = \frac{z - 1 - \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i} - \overline{z}}$$

1. $1 - \mathrm{i} - \overline{z} = \Leftrightarrow \overline{z} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1 + +\mathrm{i}$ donc $\boxed{D_\varphi = \mathbb{C} \setminus \{1 + \mathrm{i}\}}$

2. $|\varphi(z)| == \dfrac{|z-1-\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}-\bar{z}|} = \dfrac{|z-1-\mathrm{i}|}{|-1||-1+\mathrm{i}+\bar{z}|} = \dfrac{|z-1-\mathrm{i}|}{|z-\overline{1}-\mathrm{i}|}1$ pour tout $z \in\in D_\varphi$, car un nombre complexe et son conjugué ont même module

   $\boxed{\varphi \text{ n'est alors pas surjective}}$ puisque tout nombre complexe de module différent de 1 ne peut avoir d'antécédent par φ.

3. $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z-1-\mathrm{i} = 1-\mathrm{i}-\bar{z} \Leftrightarrow z+\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z = 1+\mathrm{i}y, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ car $z \neq 1+\mathrm{i}$.

   $\boxed{\varphi \text{ n'est alors pas injective}}$ car 1 a une infinité d'antécédents.

4. $\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in D_\varphi ; \varphi(z) \in \mathbb{R}\}$.

   Or $|\varphi(z)| = 1$ pour tout $z \in D_\varphi$ donc $z \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi(z) = 1$ ou $\varphi(z) = -1$.

   la première équation a été résolue à la question précédente, il reste à résoudre la seconde qui équivaut à $z - \bar{z} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = x + \mathrm{i}, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ car $z \neq 1+\mathrm{i}$

   $\boxed{\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z = x+\mathrm{i}, x \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \text{ ou } z = 1+\mathrm{i}y, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}\}}$

   Remarque : si on résout l'équation $\varphi(z) = a, a \in \mathbb{R}$, on trouve comme unique solution $z = 1+\mathrm{i}$ pour $a \neq 1$ ou -1 ce qui est impossible, donc on se ramène à $a = 1$ ou $a = -1$.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On évalue dans cette question $\varphi^{-1}\left(\left\{e^{\mathrm{i}\theta}\right\}\right)$.

   a) $\arg(\varphi(z)) = \arg(z-1-\mathrm{i}) - \arg(1-\mathrm{i}-\bar{z})\ [2\pi]$

   $\underset{\arg(\bar{z})=-\arg(z)}{=} \arg(z-1-\mathrm{i}) + \arg(1+\mathrm{i}+z)\ [2\pi]$

   $\underset{\arg(-z)=\pi+\arg(z)}{=} \arg(z-1-\mathrm{i}) + \pi + \arg(-1-\mathrm{i}+z)\ [2\pi] = 2\arg(z-1-\mathrm{i}) + \pi\ [2\pi]$.

   b) $\varphi(z) = e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \arg(z-1-\mathrm{i}) = \dfrac{\theta-\pi}{2}\ [\pi]$ car $|\varphi(z)| = 1$

   c) Soient A le point d'affixe $1+\mathrm{i}$.

   L'ensemble des points d'affixes les antécédents par φ de $e^{\mathrm{i}\theta}$ est la droite passant par A formant un angle de $\dfrac{\theta-\pi}{2}$ avec l'horizontale, privée du point A.

   Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, cet angle mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

6. D'après la question précédente, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{\mathrm{i}\theta}$ a au moins un antécédent par φ donc,

   $\boxed{\text{pour que } \varphi : D_\varphi \to E \text{ soit surjective il suffit de choisir } E = \mathbb{U}}$

Exercice 6

$$(E) : x^2\,y'' + x\,y' + 9\,y = x^2$$

On note (H) l'équation homogène associée à (E) $\qquad (H) : x^2\,y'' + x\,y' + 9\,y = 0$.

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $\varphi : x \mapsto ax^2 + bx + c$, deux fois dérivable sur I : $\varphi'(x) = 2ax + b$ et $\varphi''(x) = 2a$.

   φ est solution de (E) si, et seulement si, $\forall x \in I$,

   $x^2\,(2a) + x\,(2ax+b) + 9\left(ax^2 + bx + c\right) = 1 + x^2$.

   On obtient, après développement et identification, $\boxed{\varphi : x \longmapsto \dfrac{1}{13}x^2.}$

2. (a) La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans I, et f est deux fois dérivable sur I. Par composition, $\boxed{g \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}.}$
   (b) $g'(t) = e^t f'\left(e^t\right)$ et $g''(t) = e^t f'\left(e^t\right) + e^{2t} f''\left(e^t\right)$.
   (c) f est solution de (H) sur I si, et seulement si, $\forall x \in I$, $x^2 f''(x) + x f'(x) + 9f(x) = 0$.
   En posant $t = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^t$, t décrivant $\mathbb{R}$ lorsque x décrit I, on obtient de façon équivalente :
   $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{2t} f''\left(e^t\right) + e^t f'\left(e^t\right) + 9f\left(e^t\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g''(t) + 9g(t) = 0}$
   (d) L'équation caractéristique : $r^2 + 9 = 0$, possède deux racines complexes $r = 3i$ et $\overline{r} = -3i$.
   Les solutions de (H_1) sur $\mathbb{R}$ sont $t \mapsto g(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f\left(e^t\right) \Leftrightarrow \forall x \in I$, $f(x) = g(\ln(x))$.
   Les solutions de (H) sur I sont
   $\boxed{x \mapsto g(\ln(x)) = a\cos(3\ln(x)) + b\sin(3\ln(x)),\ \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.}$
3. Les solutions générales de (E) sur I sont
   $$\boxed{x \mapsto \varphi(x) = \frac{1}{13}x^2 + a\cos(3\ln(x)) + b\sin(3\ln(x)),\ \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 7 On considère l'équation différentielle (E) : $x\ln(x)y' - (3\ln(x)+1)y = x^3$ d'ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les limites de $\dfrac{x^3-1}{x-1}$ et $\dfrac{x^3\ln(x)}{x-1}$ lorsque x tend vers 1.
2. Montrer que $y_p(x) = Ax^n$ avec $A \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ est une solution de (E).
3. Résoudre (E) sur $]0,1[$.
4. Résoudre (E) sur $]1,+\infty[$.

Exercice 8

1. Évaluer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$A_n = \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} 4^p,\ B_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p} \text{ et } C_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(px).$$
2. À l'aide d'un changement approprié d'indice, montrer que
   $$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right).$$
3. i) Simplifier par télescopage $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1}v_{k+1} - u_k v_k)$.
   ii) En déduire la formule de sommation par parties (analogue discret d'une IPP)

$$(SPP) \quad \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k)\, v_k = u_{n+1}v_{n+1} - u_0 v_0 - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\,(v_{k+1} - v_k)$$

iii) Effectuer une sommation par parties pour évaluer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$,

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{n} k \left(q^{k+1} - q^k\right)$$

iv) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kq^k$.

v) À l'aide d'une SPP (Cf. 3)ii)), en posant $u_{k+1} - u_k = 1$ et $v_k = k^3$, évaluer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$.

4) En utilisant le 3)v), évaluer

$$\sigma_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$$

Exercice 9 $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -4 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\boxed{= -2A + 3I_3.}$

2. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

   I : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et la propriété est vérifiée au rang 0 en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

   H : supposons qu'à un rang n, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.

   On a alors $A^{n+1} = A \times A^n = a_n A^2 + b_n A = a_n(-2A + 3I_3) + b_n I_3 = (b_n - 2a_n)A + 3a_n I_3$

   Donc $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_3$ en posant $a_{n+1} = b_n - 2a_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$

   C : On a montré par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $\boxed{A^n = a_n A + b_n I_3.}$

3. $\begin{cases} a_{n+1} = b_n - 2a_n \\ b_{n+1} = 3a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 3a_{n-1} - 2a_n \\ b_{n+1} = 3a_n \end{cases}$

   (a_n) est donc une suite linéaire récurrente d'ordre 2, avec pour équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ qui s'annule en 1 et -3, d'où $a_n = A + B(-3)^n, A, B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

   $a_0 = A + B = 0$ et $a_1 = A - 3B = 1$ d'où $A = -B = \dfrac{1}{4}$ puis

   $\boxed{a_n = \dfrac{1 - (-3)^n}{4} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

   $b_n = 3a_{n-1} = \dfrac{3 - 3(-3)^{n-1}}{4} = \dfrac{3 + (-3)^n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ avec $b_0 = 1$ donc

$$\boxed{b_n = \frac{3+(-3)^n}{4}\,\forall n \in \mathbb{N}} \text{ puis } \boxed{A^n = \frac{1-(-3)^n}{4}A + \frac{3+(-3)^n}{4}I_3\,\forall n \in \mathbb{N}}$$

Exercice 10 Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(1, 1, -2)$.

1. Par la méthode de Gauss Jordan, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. On pose $A = PDP^{-1}$.

   D est inversible comme matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls et A et inversible comme produit de matrices inversibles avec
   $A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$
   On montre alors par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (voir TD 11 Exercice 6) et pour $n < 0, A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \left(PD^{-1}P^{-1}\right)^n = PD^{-n}P^{-1}$ par la même récurrence ce qui montre que $\boxed{A^n = PD^nP^{-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}}$