Concours blanc n° 1

La partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 et Partie 2 sur ces copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Partie 2

Exercice 1 **10 points** : **1.** 0.75 **2.** 0.75 **3.** 0.75 **4.** 1 **5.** 1 **6.(a)** 0.75 **6.(b)** 2 **6.(c)** 1.5 **6.(d)** 1 **6.(e)** 0.5

Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

1. Calculer et mettre sous forme algébrique l'image par f des nombres $-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ et $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.
2. Déterminer les antécédents éventuels du nombre i par l'application f.
3. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
4. En posant $z = x + \mathrm{i}y$, déterminer en fonction de x et de y les parties réelle et imaginaire du nombre $f(z)$.
5. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, et ceux pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ en interprétant géométriquement ces résultats.
6. On définit désormais une suite de fonctions g_n sur $\mathbb{C}$ en posant $g_0(z) = 2, g_1(z) = z$ et $\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+2}(z) = zg_{n+1}(z) - g_n(z)$.
   (a) Calculer une expression explicite de $g_2(z)$, de $g_3(z)$, puis de $g_4(z)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $g_2(z) = 0, g_3(z) = 0$ puis $g_4(z) = 0$.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, g_n(f(z)) = f(z^n)$.
   (d) Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$, et en déduire les solutions de l'équation $g_n(z) = 0$, en précisant le nombre de solutions de cette équation.
   (e) Calculer $u_n = g_n\left(\dfrac{5}{2}\right)$ en utilisant la définition par récurrence des fonctions g_n, puis vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec la formule de la question 6. (c).

Exercice 2 **10 points** : **A.1.(a)** 0.25 **A.1.(b)** 0.5 **A.1.(c)** 0.75 **A.2.(a)** 2 **A.2.(b)** 1 **A.2.(c)** 1 **B.1.** 0.75 **B.2.** 0.75 **B.3.(a)** 0.5 **B.3.(b)** 0.5 **B.4.** 0.5 **B.5.** 1.5

Dans tout ce problème, on considère l'ensemble $\mathcal{A}$ de matrices défini par
$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et on désigne par M la matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. (a) Calculer M^2.
   (b) Exprimer M^3 en fonction de I_3 et M.
   (c) En déduire que M est inversible et déterminer son inverse. *On ne cherchera pas à expliciter les neuf coefficients de M^{-1}.*
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. On se propose de prouver par analyse-synthèse que A se décompose de manière unique sous la forme $A = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2$ avec $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
   (a) Analyse : On suppose qu'il existe λ_0, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $A = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2$.
   Prouver que $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ est solution d'un système linéaire qu'on écrira sous forme matricielle $B \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où B est une matrice à déterminer puis résoudre ce système.
   (b) Effectuer la phase de synthèse et conclure.
   (c) Déduire de la question 2.(a) que la matrice B est inversible et expliciter son inverse.

Partie B

1. Montrer que si A et A' sont deux matrices dans $\mathcal{A}$ alors AA' est également dans $\mathcal{A}$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, la matrice M^n appartient à $\mathcal{A}$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que
$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & c_n \\ 0 & -c_n & b_n \end{pmatrix}$$
3. (a) Préciser les valeurs de a_0, b_0, c_0 et a_1, b_1, c_1.
   (b) Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seule et deux relations de récurrence liant les suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. En déduire une expression de a_n en fonction de n.
5. Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre complexe $z_n = b_n + ic_n$.
   Exprimer z_{n+1} en fonction de z_n puis en déduire l'expression de b_n en fonction de n.