

Ex 1

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n - \alpha_n = 0$. Puisque $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. $\beta_{n+1} - \beta_n = \alpha_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - (\alpha_n + \frac{1}{n n!})$
 $= \alpha_{n+1} - \alpha_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n n!}$
 d'où $\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \right] = \frac{1}{n!} \frac{(n+2)n - (n+1)^2}{(n+1)^2 n} = -\frac{1}{n! (n+1)n} < 0$
 donc $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- 2) D'après 1) et le théorème des suites adjacentes, α_n et β_n convergent vers la même limite λ .

- 3) Toujours d'après 1) (tenant compte de la stricte monotonie de α_n et β_n) on a :

$$\alpha_n < \lambda < \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (E_n^*)$$

- 4) On déduit de 3) que $m! \alpha_m < m! \lambda < m! \beta_m$
 $\forall m \in \mathbb{N}^*$. Notons que $m! \alpha_m$ est un entier et que $m! \beta_m = m! \alpha_m + \frac{1}{m}$. Si λ était rationnel, λ s'écrirait $\lambda = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On aurait donc

$$q! \alpha_q < q! \lambda < q! \alpha_q + \frac{1}{q}$$

mais $q! \lambda$ serait, tout comme $q! \alpha_q$, un entier naturel. Cette dernière double inégalité est impossible. Ainsi λ est forcément irrationnel.

- 5) $\beta_n - \alpha_n = \frac{1}{n n!}$. Avec $n=3$ on observe que $\frac{1}{3 \cdot 3!} = \frac{1}{18}$ est inférieur à $6 \cdot 10^{-2}$ (tandis que $\frac{1}{2 \cdot 2!} = \frac{1}{4}$ ne l'est pas)

$$\text{D'où} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < \lambda < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \frac{1}{3 \cdot 3!}$$

$$\text{Mais } \alpha_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} = 2,666 \dots$$

D'au

$$2,66 < \lambda < 2,72$$

puisque $\frac{1}{18} = 0,0555 \dots$

(Ex 2)

0) i) $e^x y'' - e^x y = 0 \Leftrightarrow y'' - y = 0$

d'où l'ensemble des solutions de (H_α) lorsque $d(x) = e^x$

$$\mathcal{Y}_{H_\alpha} = \{ A e^x + B e^{-x}, A, B \in \mathbb{R} \}$$

ii) $\cos x \cdot y'' + \cos x y = 0 \Leftrightarrow y'' + y = 0$ $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

d'où $\mathcal{Y}_{H_\alpha}^I = \{ A \cos x + B \sin x, A, B \in \mathbb{R} \}$ si $d(x) = \cos x$

1) Comme $\alpha : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ ne s'annule pas, toute fonction $y : I \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ donne lieu à la fonction $K = \frac{y}{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ également de classe C^2 (théorème général) et réciproquement.

2) Avec $y = K\alpha$, $y' = K'\alpha + K\alpha'$ et $y'' = K''\alpha + 2K'\alpha' + K\alpha''$
d'où $\alpha y'' - \alpha'' y = \alpha (K''\alpha + 2K'\alpha' + K\alpha'') - \alpha'' K\alpha$

Ainsi $\alpha y'' - \alpha'' y = 0$ sur I si et seulement si

$\alpha K'' + 2\alpha' K' = 0$ sur I si et seulement si

$K'' + 2\frac{\alpha'}{\alpha} K' = 0$ sur I .

Donc $y = K\alpha$ est solution de (H_α) si et seulement si K' est solution de $y' + 2\frac{\alpha'}{\alpha} y = 0$ $(H_{\alpha,1})$ sur I .

3) Avec $a = 2\frac{\alpha'}{\alpha}$ on a $A' = a$ pour $A = \ln \alpha^2$ de sorte que l'ensemble des solutions de $(H_{\alpha,1})$ sur I

est $\mathcal{Y}_{H_{\alpha,1}}^I = \left\{ \frac{\lambda}{\alpha^2}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Donc $K' = \frac{\lambda}{\alpha^2}$ d'où $K(x) = \lambda \int_c^x \frac{du}{\alpha(u)^2} + \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (b3)

et l'ensemble des solutions de (H_k) sur I est :

$$\bigcup_{(H_k)}^I = \left\{ \lambda \alpha(x) \int_c^x \frac{du}{\alpha(u)^2} + \mu \alpha(x), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Ex3

0) 2) $\int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1 = \frac{1}{k}$

b) $K_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$ (Euler)

1) $\int_0^1 \sigma_n(\theta, t) dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i\theta} t)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \int_0^1 t^k dt$
 $= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{ik\theta}}{k+1}$. D'où $e^{i\theta} \int_0^1 \sigma_n(\theta, t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)\theta}}{k+1}$

et avec $k' = k+1$, $e^{i\theta} \int_0^1 \sigma_n(\theta, t) dt = \sum_{k'=1}^n \frac{e^{ik'\theta}}{k'}$.

On a donc bien $K_n(\theta) = e^{i\theta} \int_0^1 \sigma_n(\theta, t) dt$

2) a) $\sum_{k=1}^n \frac{\sin \theta}{k} = 0$ $\left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right| = 0$

b) $\ln(0) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Donc $\ln(0) - \ln(0) = \frac{1}{n+1} > 0$

et $\ln(0)$ est strictement croissante.

Le théorème de la limite monotone nous apprend que soit $\ln(0)$ converge soit $\ln(0)$ diverge vers $+\infty$.

Comme $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \quad \forall t \in [k, k+1]$, la positivité de l'intégrale donne $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k} = \frac{1}{k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

D'où $\ln(n) \geq \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
(relation de Cauchy). Et $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$.

Par suite $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n) = +\infty$.

3) Si $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, $e^{i\theta} t \neq 1 \quad \forall t \in [0, 1]$ et
 $\left| \kappa_n(\theta, t) \right| = \frac{1 - (e^{i\theta} t)^n}{1 - e^{i\theta} t}$. Il vient que

$$\left| \kappa_n(\theta) \right| = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{1 - (e^{i\theta} t)^n}{1 - e^{i\theta} t} dt = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{dt}{1 - e^{i\theta} t} + R_n(\theta)$$

où $R_n(\theta) = -e^{i(n+1)\theta} \int_0^1 \frac{t^n}{1 - e^{i\theta} t} dt$

$$4) \left| 1 - e^{i\theta} t \right|^2 = (1 - e^{i\theta} t)(1 - \bar{e}^{i\theta} t) = 1 - (e^{i\theta} + \bar{e}^{i\theta})t + t^2$$

soit $\left| 1 - e^{i\theta} t \right|^2 = 1 - 2\cos\theta t + t^2 = (t - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

i.e. $\left| 1 - e^{i\theta} t \right|^2 = (t - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

Ainsi, si $\cos\theta \geq 0$, i.e. $\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi \right[\cup \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right]$

la borne inférieure de $\mathcal{D}_\theta$ est $|\sin\theta|$

sinon i.e. si $\cos\theta < 0$

la borne inférieure de $\mathcal{D}_\theta$ est $1 - \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$

5) $|R_n(\theta)| = \left| \int_0^1 \frac{t^n dt}{1 - e^{i\theta} t} \right| \stackrel{1.T}{\leq} \int_0^1 \frac{t^n}{|1 - e^{i\theta} t|} dt$

Or, d'après 4), $\frac{1}{|1 - e^{i\theta} t|} \leq \frac{1}{|\sin \theta|}$

D'où $|R_n(\theta)| \leq \frac{1}{|\sin \theta|} \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{|\sin \theta|} \frac{1}{n+1}$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\theta) = 0$ (théorème des p-darmes pour $|R_n(\theta)|$)

et $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\theta) = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{dt}{1 - e^{i\theta} t}$

6) $t^2 - 2t \cos \theta + 1 = (t - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$

D'où $\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{t - \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right]_0^1$

soit $\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) + \operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right)$

Note: $\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$

donc si $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\theta}{2}$

et $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$ donc

si $\theta \in]0, \pi[$, $\operatorname{Arctan} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) = \frac{\pi}{2} - \theta$

D'où, si $\theta \in]0, \pi[$, (on peut se ramener à ce cas)

$\int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \frac{\pi - \theta}{2 \sin \theta}$

$$\frac{t}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \frac{1}{2} \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \frac{1}{2} \frac{2t - 2 \cos \theta + 2 \cos \theta}{t^2 - 2t \cos \theta + 1}$$

$$\text{d'où} \int_0^1 \frac{t dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t - 2 \cos \theta}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} dt + \cos \theta \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(t^2 - 2t \cos \theta + 1) \Big|_0^1 + \cos \theta \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln(2(1 - \cos \theta)) + \cos \theta \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1}$$

$$\text{Mais } 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \text{d'où } \ln(2(1 - \cos \theta)) = \ln(2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

$$\text{Ainsi, si } \theta \in]0, \pi[$$

$$\int_0^1 \frac{t dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} = \ln(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) + \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} (\pi - \theta)$$

$$7) \quad \ln|\theta| + i \int_n \theta = \chi_n(\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta) \int_0^1 \frac{1 - e^{-i\theta} t}{|1 - e^{i\theta} t|^2} dt$$

$$= (\cos \theta + i \sin \theta) \int_0^1 \frac{1 - \cos \theta t + i \sin \theta t}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} dt$$

$$\text{d'où } \ln(\theta) = \cos \theta \int_0^1 \frac{1 - \cos \theta t}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} dt - \sin^2 \theta \int_0^1 \frac{t}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} dt$$

$$\text{et } \int_n(\theta) = \cos \theta \sin \theta \int_0^1 \frac{t dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} + \sin \theta \int_0^1 \frac{1 - \cos \theta t}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} dt$$

$$\text{soit } \ln(\theta) = \cos \theta \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1} - \int_0^1 \frac{t dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1}$$

et $J_n(\theta) = \sin \theta \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - 2t \cos \theta + 1}$

Ainsi, si $0 < \theta < \pi$, $I_n(\theta) = -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)$

et $J_n(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}$