CB1 de Mathématiques - Partie 1

mercredi 7 janvier 2026

Cette partie 1 doit être traitée séparément de la partie 2. Outre votre nom et votre classe, vous indiquerez Partie 1 sur ses copies et emboîterez les feuillets correspondants dans le bon ordre de lecture. Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (6 pts: **1)** 0.5+0.5+0.5 **2)** 1 **3)** 1 **4)** 1 **5)** 0.5+1)

Pour tout entier naturel n non nul, posons $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $\beta_n = \alpha_n + \frac{1}{n.\,n!}$.

1) Quelle est la limite de $\beta_n - \alpha_n$? Étudier les variations de α_n puis de β_n.

2) Montrer que α_n et β_n convergent vers la même limite $\lambda \in \mathbb{R}$.

3) Pourquoi l'encadrement $(\mathcal{E}_n)$: $\alpha_n \leq \lambda \leq \beta_n$ est valide pour tout $n \in \mathbb{N}^*$?

4) En multipliant $(\mathcal{E}_n)$ par n! montrer que λ est irrationnel.

5) Pour quelle plus petite valeur de n, $(\mathcal{E}_n)$ approxime λ à 6.10^{-2} près? Explicitez cette approximation (on laissera une trace de ses calculs faits à la main).

Exercice n°2 (5.5 pts: **0)** 1+1 **1)** 0.5 **2)** 1 **3)** 1+1)

Soient I un intervalle de réels, $c \in I$ un de ses éléments et $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 ne s'annulant jamais. Nous voulons intégrer sur I l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients variables (H_α) : $\alpha(x)\, y'' - \alpha''(x)\, y = 0$.

Cas particuliers

0) Résoudre (H_α) pour (i) $\alpha(x) = e^x$ et $I = \mathbb{R}$ puis (ii) $\alpha(x) = \cos(x)$ et $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Cas général

1) Pourquoi toute solution de (H_α) peut s'écrire sous la forme $y = K\,\alpha$ où $K : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable?

2) Montrer que y=K α est solution de (H_α) si et seulement si K' est solution de $(H_{\alpha,1})$: $y' + 2\,\frac{\alpha'}{\alpha}\,y = 0$ sur I.

3) Résoudre $(H_{\alpha,1})$ sur I puis résoudre (H_α) sur I. *(On pourra vérifier au brouillon la cohérence de ce travail avec le **0)**)*

Exercice n°3 (8.5 pts: **0) a)** 0.5 **b)** 0.5 **1)** 0.5 **2) a)** 0.25 **b)** 0.25+0.25+0.25+0.25 **3)** 0.5+0.5 **4)** 1 **5)** 0.5 **6)** 1+1.25 **7)** 0.5+0.5)

Posons $I_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\kappa\theta)}{k}$, $J_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(\kappa\theta)}{k}$ et $K_n(\theta) = I_n(\theta) + i\, J_n(\theta)$.

On rappelle l'*inégalité triangulaire* pour les fonctions de la variable réelle à valeurs complexes: si a≤b, pour toute fonction continue $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ on a

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

0) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, évaluer $\int_0^1 t^{k-1}\, dt$.

b) Simplifier $K_n(\theta)$.

1) Déduire de **0)** que $K_n(\theta) = e^{i\theta} \int_0^1 \sigma_n(\theta, t)\, dt$ où $\sigma_n(\theta, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\theta} t\right)^k$.

2) a) Que vaut $J_n(0)$?

b) Étudier les variations de $I_n(0)$. Que nous permet d'affirmer le théorème de la limite monotone? Justifier l'inégalité $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire le comportement limite de $I_n(0)$.

On suppose dorénavant que $\theta \neq 0[2\pi]$

3) Donner alors à $\sigma_n(\theta, t)$ une forme compacte valide pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que $K_n(\theta) = e^{i\theta} \int_0^1 \frac{dt}{1-e^{i\theta} t} + R_n(\theta)$ avec $R_n(\theta) = -e^{i(n+1)\theta} \int_0^1 \frac{t^n\, dt}{1-e^{i\theta} t}$.

4) Déterminer, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, la borne inférieure de $\mathcal{D}_\theta = \left\{ \left| 1 - e^{i\theta} t \right|,\ t \in [0, 1] \right\}$.

5) À l'aide du **4)** et de l'inégalité triangulaire, déterminer la limite de $K_n(\theta)$ en $+\infty$.

6) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}\, dt$ et $\int_0^1 \frac{t}{t^2 - 2t\cos(\theta) + 1}\, dt$.

7) En déduire les valeurs exactes de $I_n(\theta)$ et $J_n(\theta)$.