Correction du concours blanc n° 1
Partie 2

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

1. $f(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i} - \dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i} + \mathrm{i} = \boxed{0}$

   $f(1+\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i} + \dfrac{1}{1+\mathrm{i}} = 1 + \mathrm{i} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \boxed{\dfrac{3+\mathrm{i}}{2}}$

   $f\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\right) = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = 2\cos\left(\dfrac{2\mathrm{i}\pi}{3}\right) = \boxed{-1}$

2. $f(z) = \mathrm{i} \Leftrightarrow z + \dfrac{1}{z} = \mathrm{i} \Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}z + 1 = 0$

   $\Delta = \mathrm{i}^2 - 4 = -5 \quad z_1 = \dfrac{\mathrm{i} + \mathrm{i}\sqrt{5}}{2} \quad z_2 = \dfrac{\mathrm{i} - \mathrm{i}\sqrt{5}}{2}$

   $\boxed{\text{Les antécédents de i par l'application } f \text{ sont } \dfrac{\mathrm{i}(1+\sqrt{5})}{2} \text{ et } \dfrac{\mathrm{i}(1-\sqrt{5})}{2}}$

3. $\boxed{\text{L'application } f \text{ n' est pas injective}}$ car i a deux antécédents par f d'après la question précédente.

   $f(z) = a \Leftrightarrow z^2 - az + 1 = 0$ qui est une équation de degré 2 dans $\mathbb{C}$ donc a au moins une solution dans $\mathbb{C}$. De plus 0 n'est pas solution de cette équation donc

   $\boxed{\text{l'application } f \text{ est surjective.}}$

4. $f(z) = z + \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{z|z|^2 + \overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x(x^2+y^2+1) + \mathrm{i}y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}$

   $\boxed{\mathrm{Re}\,(f(z)) = \dfrac{x(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} \text{ et } \mathrm{Im}\,(f(z)) = \dfrac{y(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2}}$

5. $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(f(z)) = 0 \Leftrightarrow x(x^2+y^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ car $x^2 + y^2 + 1 \neq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{L'image réciproque de l'axe imaginaire est lui même, privé de l'origine : } f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^*}$

   $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y(x^2+y^2-1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x^2+y^2 = 1$

   $\boxed{\text{L'image réciproque de l'axe réel est l'union de l'axe réel privé de l'origine et du cercle trigonométrique}}$

   $\boxed{f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \cup \mathbb{U}}$

6. On définit désormais une suite de fonctions g_n sur $\mathbb{C}$ en posant $g_0(z) = 2, g_1(z) = z$ et $\forall n \in \mathbb{N}, g_{n+2}(z) = zg_{n+1}(z) - g_n(z)$.

   (a) $g_2(z) = z^2 - 2,\ g_3(z) = z^3 - 3z,\ g_4(z) = z(z^3 - 3z) - (z^2 - 2) = z^4 - 4z^2 + 2$.

   (b) $g_2(z) = 0 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{2}, g_3(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \pm\sqrt{3}$

   En posant $Z = z^2$ $g_4(z) = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 4Z + 2 = 0 \quad \Delta = 8 \quad Z = 2 \pm \sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow$

   $\boxed{z = \pm\sqrt{2+\sqrt{2}} \text{ ou } z = \pm\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

(c) Montrons que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, g_n(f(z)) = f(z^n)$ par récurrence double :
$g_0(f(z)) = 2$ et $f(z^0) = 2 \quad g_1(f(z)) = f(z)$.
Supposons que $g_n(f(z)) = f(z^n)$ et $g_{n+1}(f(z)) = f(z^{n+1})$ à un rang n on a alors
$g_{n+2}(f(z)) = f(z)g_{n+1}(f(z)) - g_n(f(z)) = f(z)f(z^{n+1}) - f(z^n)$
$g_{n+2}(f(z)) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n}$
$g_{n+2}(f(z)) = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})$
On a montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, g_n(f(z)) = f(z^n)}$

(d) $f(z^n) = 0 \Leftrightarrow z^{2n} = -1 \Leftrightarrow z_k = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}{2n}}, k \in [\![0, 2n-1]\!]$
$f(z^n) = 0 \Rightarrow g_n(f(z)) = 0$ d'après la question précédente donc les
$f(z_k) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}{2n}} + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(\pi+2k\pi)}{2n}} = 2\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)$ sont solutions de l'équation
$g_n(z) = 0$.
Ces racines sont distinctes pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ puisque $\frac{\pi + 2k\pi}{2n} \in [0, \pi]$ et on démontre par récurrence double que $g_n(z)$ est un polynôme de degré n.

$\boxed{\text{Ces } n \text{ racines distinctes sont donc les solutions de l'équation } g_n(z) = 0.}$

Remarque Ces racines sont réelles ce qui est cohérent avec les résultats de la question 6. (a)

(e) $u_n = g_n\left(\frac{5}{2}\right)$. En utilisant la définition par récurrence des fonctions g_n on obtient
$u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 2$ et $u_1 = \frac{5}{2}$.
La suite (u_n) est alors une suite linéaire récurrente d'ordre 2, d'équation caractéristique $2r^2 - 5r + 2 = 0$ qui a pour racines 2 et $\frac{1}{2}$

$u_n = A2^n + \frac{B}{2^n}$ avec $u_0 = A + B = 2$ et $u_1 = 2A + \frac{B}{2} = \frac{5}{2}$ d'où $A = B = 1$ et
$\boxed{u_n = 2^n + \frac{1}{2^n}}$
On remarque que $u_n = f(2^n)$ et on a $f(2) = \frac{5}{2}$ donc

$\boxed{\text{on retrouve la formule de la question 6. (c) dans le cas particulier où } z = 2.}$

Exercice 2

Partie A

1. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On calcule $M^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. En regardant les coefficients non diagonaux, on remarque que $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi, on a

$$M^3 = 2M - 4I_3. \tag{1}$$

(c) On a $M^3 = 2M - 4I_3$ qui se réécrit sous la forme

$$2M - M^3 = 4I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(2I_3 - M^2)M = M \times \frac{1}{4}(2I_3 - M^2) = I_3.$$

Par conséquent, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} = \dfrac{1}{4}(2I_3 - M^2)$.

Remarque L'énoncé demande de déduire l'inversibilité de M de la question précédente et ne demande pas les coefficients de la matrice inverse donc la méthode de Gauss Jordan n'est pas adaptée à la réponse mais j'ai quand même mis 0.5/0.75 à ceux qui l'ont bien appliquée.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$.

(a) Analyse : On suppose qu'il existe trois réels λ_0, λ_1, λ_2 tels que $A = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2$. On a

$$\begin{aligned}
A = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2 &\Leftrightarrow A = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 + \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 & -(\lambda_1 + 2\lambda_2) & \lambda_0 + \lambda_1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = a \\ \lambda_0 + \lambda_1 = b \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = c \end{cases}.
\end{aligned}$$

En posant $X = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ce système $(\mathcal{S})$ se réécrit sous la forme $BX = Y$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = a \\ \lambda_0 + \lambda_1 = b \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \lambda_1 - 2\lambda_1 + 2(c - \lambda_1) = a \\ \lambda_0 = b - \lambda_1 \\ 2\lambda_2 = c - \lambda_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \dfrac{1}{5}(a + 4b - 2c) \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{5}(-a + b + 2c) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{10}(a - b + 3c) \end{cases}.$$

(b) Synthèse : On pose $\lambda_0 = \dfrac{1}{5}(a + 4b - 2c)$, $\lambda_1 = \dfrac{1}{5}(-a + b + 2c)$ et $\lambda_2 = \dfrac{1}{10}(a - b + 3c)$. On calcule

$$\lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 + \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 & -(\lambda_1 + 2\lambda_2) & \lambda_0 + \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Or, avec les valeurs de λ_0, λ_1 et λ_2 choisies, il vient

$$\begin{cases} \lambda_0 - 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = \dfrac{a + 4b - 2c}{5} - \dfrac{2(-a + b + 2c)}{5} + \dfrac{2(a - b + 3c)}{5} = a \\ \lambda_0 + \lambda_1 = \dfrac{a + 4b - 2c}{5} + \dfrac{-a + b + 2c}{5} = b \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = \dfrac{-a + b + 2c}{5} + \dfrac{a - b + 3c}{5} = c \end{cases}.$$

Ainsi, on obtient $\lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix} = A$. Par conséquent la matrice A se décompose sous la forme $A = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 M + \lambda_2 M^2$ avec λ_0, λ_1, λ_2 réels. L'analyse garantit l'unicité de cette décomposition.

(c) Le résultat de la question 2.(a) se réinterprète sous la forme : Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = Y$. Par conséquent, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.

De plus, la résolution du système $(\mathcal{S})$ réalisée lors de la question 2.(a)donne

$$\begin{cases} \lambda_0 = \dfrac{1}{5}(a + 4b - 2c) \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{5}(-a + b + 2c) \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{10}(a - b + 3c) \end{cases}$$

qui se réécrit sous la forme $X = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} Y$. La méthode d'inversion d'une matrice par résolution d'un système linéaire donne immédiatement

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie 2 Puissances de M

1. Soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix}$ deux matrices dans $\mathcal{A}$. On calcule

$$AA' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & c' \\ 0 & -c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 & 0 \\ 0 & bb'-cc' & bc'+cb' \\ 0 & -(bc'+cb') & bb'-cc' \end{pmatrix}$$

donc $AA' \in \mathcal{A}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La matrice M appartient à $\mathcal{A}$ et on montre que la matrice $M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ fois}}$ appartient à $\mathcal{A}$ par récurrence en utilisant $M^{n+1} = M \times M^n$. Étant donnée la forme des matrices de $\mathcal{A}$, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & c_n \\ 0 & -c_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Remarque Cette récurrence est triviale, on n'était pas obligé de la rédiger, mais le mot "récurrence" doit apparaître dans la rédaction.

3. (a) On a $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $a_0 = 1,\quad b_0 = 1$ et $c_0 = 0$. On a

$$M^1 = M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } a_1 = -2,\quad b_1 = 1 \text{ et } c_1 = 1.$$

(b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b_{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & -c_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n+1} = MM^n = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n & c_n \\ 0 & -c_n & b_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2a_n & 0 & 0 \\ 0 & b_n - c_n & b_n + c_n \\ 0 & -(b_n+c_n) & b_n - c_n \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{n+1} = -2a_n \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_{n+1} = b_n - c_n \\ c_{n+1} = b_n + c_n \end{cases} .$$

4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $a_0 = 1$ et la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -2a_n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2. Il s'ensuit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0(-2)^n = (-2)^n.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$z_{n+1} = b_{n+1} + ic_{n+1} = b_n - c_n + i(b_n + c_n) = b_n + ic_n + i(b_n + ic_n) = z_n + iz_n = (1+i)z_n.$$

La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1+i$ avec $z_0 = b_0 + ic_0 = 1$. Il s'ensuit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = (1+i)^n.$$

Pour conclure, b_n étant par construction la partie réelle du complexe z_n, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \mathrm{Re}\left((1+i)^n\right).$$

en écrivant $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, il vient

$$\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^n\right) = \mathrm{Re}\left((\sqrt{2})^n \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left((\sqrt{2})^n e^{in\frac{\pi}{4}}\right) = (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$