Correction du devoir maison n° 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$ existe ssi $\dfrac{x}{x-1} > 0 \iff x < 0$ ou $x > 1$.

   Comme la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et ln est définie sur $]0;+\infty[$,

   $$\boxed{f \text{ est définie sur } \mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[}.$$

2. Sur $]-\infty;0[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$ est continue (comme fonction rationnelle continue sur son ensemble de définition) à valeurs dans $]0;+\infty[$. Comme la fonction ln est continue sur $]0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty;0[$ comme composée de fonctions continues. Comme les fonctions exp et $x \mapsto x-1$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto (x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ est continue sur $]-\infty;0[$ comme produit de fonctions continues et f est continue sur $]-\infty;0[$ comme composée de fonctions continues.

   On montre, de même, que f est continue sur $]1;+\infty[$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition}}$.

3. (a) $\forall x > 1$, $(x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = (x-1)\ln(x) - (x-1)\ln(x-1)$.

   $(x-1)\ln(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$, par opérations sur les limites.

   $x-1 \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0^+$ et $y\ln(y) \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, par croissance comparée.

   Donc $(x-1)\ln(x-1) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$, par composition.

   Donc $f(x) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 1$ par opérations sur les limites et par composition.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité (à droite) en } 1}$.

   (b) $\dfrac{x}{x-1} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0^+$ donc $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$, par composition.

   Par opérations sur les limites et par composition, on obtient :

   $(x-1)\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$ puis $f(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$.

   Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité (à gauche) en } 0}$.

4. $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \mathrm{e}^{(x-1)\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}$ et $(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}}$.

   Or $\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln(1+y)}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$.

   Donc, par composition, on a $(x-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 1$, puis $\boxed{f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.

   On montre, de même, que $\boxed{f(x) \underset{x\to -\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}}$.