

Devoir maison n° 12

A rendre le jeudi 22 janvier 2026

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{x \ln(x)}{x - 1}$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction φ .
2. Quelle est la limite de la fonction φ en 0_+ ?
3. Montrer que φ admet une limite en 1.
4. Déterminer le prolongement par continuité $\tilde{\varphi}$ de φ sur \mathbb{R}_+ .
5. Justifier que $\tilde{\varphi}$ est dérivable sur D .
6. Étudier la dérivabilité de $\tilde{\varphi}$ en 0_+ . Que peut-on en déduire pour le graphe Γ de $\tilde{\varphi}$ dans un repère du plan ?
7. On veut d"étudier la dérivabilité de $\tilde{\varphi}$ en 1.
 - (a) Montrer que $\forall t \geq -\frac{1}{2}, 0 \leq \frac{1}{1+t} - (1-t) \leq 2t^2$
 - (b) Montrer que $\forall x \geq -\frac{1}{2}, \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3$
 - (c) Déduire de la question précédente que $\tilde{\varphi}$ est dérivable en 1.
 - (d) Donner une équation cartésienne de la droite Δ tangente à Γ au point d'abscisse 1.
8. (a) Montrer que le logarithme népérien est concave sur \mathbb{R}_+^* .
 - (b) En déduire l'inégalité $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.
 - (c) Construire le tableau de variations de $\tilde{\varphi}$.
 - (d) Montrer que $\tilde{\varphi}$ réalise une bijection continue de \mathbb{R}_+ à valeurs dans un intervalle à déterminer.
 - (e) Sur quel ensemble $\tilde{\varphi}^{-1}$ est-elle dérivable ? Que vaut $(\tilde{\varphi}^{-1})'(1)$?
9. Prouver que le graphe du logarithme népérien est asymptote au graphe Γ de $\tilde{\varphi}$ en $+\infty$.
10. Tracer Γ en représentant toutes les informations obtenues.