

## Devoir maison n° 12

A rendre le jeudi 22 janvier 2026

On considère la fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1}$

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de la fonction  $\varphi$ .
2. Quelle est la limite de la fonction  $\varphi$  en  $0_+$  ?
3. Montrer que  $\varphi$  admet une limite en 1.
4. Déterminer le prolongement par continuité  $\tilde{\varphi}$  de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
5. Justifier que  $\tilde{\varphi}$  est dérivable sur  $D$ .
6. Étudier la dérivabilité de  $\tilde{\varphi}$  en  $0_+$ . Que peut-on en déduire pour le graphe  $\Gamma$  de  $\tilde{\varphi}$  dans un repère du plan ?
7. On veut d'étudier la dérivabilité de  $\tilde{\varphi}$  en 1.
  - (a) Montrer que  $\forall t \geq -\frac{1}{2}, 0 \leq \frac{1}{1+t} - (1-t) \leq 2t^2$
  - (b) Montrer que  $\forall x \geq -\frac{1}{2}, \left| \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \right| \leq \frac{2}{3}|x|^3$
  - (c) Dédurre de la question précédente que  $\tilde{\varphi}$  est dérivable en 1.
  - (d) Donner une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  tangente à  $\Gamma$  au point d'abscisse 1.
8.
  - (a) Montrer que le logarithme népérien est concave sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
  - (b) En déduire l'inégalité  $\ln(x) \leq x - 1$  pour tout  $x > 0$ .
  - (c) Construire le tableau de variations de  $\tilde{\varphi}$ .
  - (d) Montrer que  $\tilde{\varphi}$  réalise une bijection continue de  $\mathbb{R}_+$  à valeurs dans un intervalle à déterminer.
  - (e) Sur quel ensemble  $\tilde{\varphi}^{-1}$  est-elle dérivable ? Que vaut  $(\tilde{\varphi}^{-1})'(1)$  ?
9. Prouver que le graphe du logarithme népérien est asymptote au graphe  $\Gamma$  de  $\tilde{\varphi}$  en  $+\infty$ .
10. Tracer  $\Gamma$  en représentant toutes les informations obtenues.