Correction du Test n° 11 Sujet A

1.

2. Étudier la limite de $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-1 \leqslant x+\cos x \leqslant x+1$ et $x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$ donc,

   pour tout $x>1$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x+\sin x} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$ et $\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x} \leqslant \dfrac{x+1}{x-1}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$ (fraction rationnelle) d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1}$ d'après le théorème des gendarmes.

3. On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{x}{2x+|x|}$

   (a) Si $x<0$ alors $f(x) = \dfrac{x}{2x-x} = 1$ Si $x>0$ alors $f(x) = \dfrac{x}{2x+x} = \dfrac{1}{3}$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1 \text{ et } \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \dfrac{1}{3}}$

   (b) $\boxed{\text{On ne peut pas prolonger } f \text{ par continuité en } 0}$ car $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

4. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{x}}$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ par composition et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$

   $$\boxed{f \text{ est donc prolongeable par continuité en } 0 \text{ à droite en posant } \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}}$$

Correction du Test n° 11 Sujet B

1.

2. Étudier la limite de $\dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant 4\sin^2 x \leqslant 4$ et $-3 \leqslant 3\cos(5x) \leqslant 3$ donc

   $-3 \leqslant 4\sin^2 x + 3\cos(5x) \leqslant 7$ et pour tout $x>0$, $\dfrac{-3}{x} \leqslant \dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x} \leqslant \dfrac{7}{x}$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{7}{x} = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4\sin^2 x + 3\cos(5x)}{x} = 0}$ d'après le théorème des gendarmes.

3. On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2x+|x|}{x}$

(a) Si $x<0$ alors $f(x)=\dfrac{2x-x}{x}=1$ Si $x>0$ alors $f(x)=\dfrac{2x+x}{x}=3$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1 \text{ et } \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=3}$

(b) $\boxed{\text{On ne peut pas prolonger } f \text{ par continuité en } 0}$ car $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

4. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} 1+e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ par composition et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$$\boxed{f \text{ est donc prolongeable par continuité en } 0 \text{ à droite en posant } \widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & si\ x\in\mathbb{R}_+^* \\ 0 & si\ x=0\end{cases}}$$