Correction du devoir maison n° 1

Exercice 1

1. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

2. On applique les formules transformant sommes en produits :

   $$\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{7\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}$$
   $$\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}$$

   donc

   $$\frac{\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

Exercice 2 Si on pose $t=\tan\dfrac{x}{2}$ alors $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$ (Formule du cours !)

$\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}-1$

Or $1+t^2 = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$ donc $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{1+t^2}$

d'où $\cos x = \dfrac{2}{1+t^2}-1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Exercice 3 On cherche à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\tan^2(3x)-2\sqrt{2}\tan(3x)+1=0$.

1. x est valeur interdite ssi $3x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

2. $X^2-2\sqrt{2}X+1=0$.

   $\Delta = (2\sqrt{2})^2-4=4,\qquad X_1 = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1$ et $X_2 = \dfrac{2\sqrt{2}+2}{2} = \sqrt{2}+1$

3. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

   En posant $x=\dfrac{\pi}{8}$ on obtient $\tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan^2\dfrac{\pi}{8}}$ d'où

   $$1 = \frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow 1-\tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8}$$

$\tan\frac{\pi}{8}$ est alors solution de l'équation $X^2+2X-1=0$

$\Delta=8$ $X_1=\frac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}<0$ et $X_2=\frac{-2+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}-1>0$

Or $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ car $0\leqslant\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1$

4. $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

5. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}=\sqrt{2}+1$.

6. D'après la question 2., les solutions de (E) vérifient

$$\begin{cases}\tan(3x)=\sqrt{2}+1=\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\ \tan(3x)=\sqrt{2}-1=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\end{cases}$$

D'où $\begin{cases}3x=\frac{3\pi}{8}+k\pi\\ 3x=\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

En vérifiant que ces valeurs ne sont pas interdites, on obtient les solution de (E) :

$$\boxed{x=\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{3}, x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{3}k\in\mathbb{Z}}$$

En effet $\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k'\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow(k-k')\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{24}=\frac{3\pi}{24}=\frac{\pi}{8}\Leftrightarrow k-k'=\frac{3}{8}$

De même $\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k'\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow(k-k')\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{24}\Leftrightarrow k-k'=\frac{1}{24}$

ce qui est impossible dans les deux cas sachant que $k-k'\in\mathbb{Z}$.