Correction du devoir maison n° 12

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x-1}$

1. La fonction φ si $x > 0$ et $x \neq 1$ donc le domaine de définition de φ est

   $\boxed{D =]0,1[\cup]1,+\infty[.}$

2. $\lim\limits_{x\to 0_+} x\ln x = 0$ par croissance comparée, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0_+} \varphi = 0}$ par quotient.

3. Limite en 1 : on pose $x = 1+u$ et $\varphi(x) = \dfrac{(1+u)\ln(1+u)}{u}$.

   Or $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \varphi = 1}$

4. φ est continue sur D comme quotient de fonction qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

   De plus, d'après les questions 2. et 3., on peut prolonger φ par continuité sur $\mathbb{R}_+$ en posant $\boxed{\begin{cases} \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x), x \in D \\ \tilde{\varphi}(0) = 0 \\ \tilde{\varphi}(1) = 1 \end{cases}}$

5. φ est dérivable sur D comme quotient de fonction qui le sont dont le dénominateur ne s'annule pas.

6. $\dfrac{\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(0)}{x} = \dfrac{\ln x}{x-1} \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\boxed{\tilde{\varphi} \text{ n'est pas dérivable en } 0_+.}$

   Le graphe Γ de $\tilde{\varphi}$ admet $\boxed{\text{une tangente verticale en } 0.}$

7. On veut d'"étudier la dérivabilité de $\tilde{\varphi}$ en 1.

   (a) $\dfrac{1}{1+t} - (1-t) = \dfrac{1-(1-t^2)}{1+t} = \dfrac{t^2}{1+t} \geqslant 0$ pour tout $t > -1$ et, pour $t \geqslant -\dfrac{1}{2}$, $1+t \geqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 2$ et $\dfrac{t^2}{1+t} \leqslant 2t^2$. D'où $\boxed{\forall t \geqslant -\dfrac{1}{2}, 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} - (1-t) \leqslant 2t^2}$

   (b) On peut intégrer l'inégalité précédente entre 0 et x :

   Pour $x > 0$ on obtient $0 \leqslant \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant \dfrac{2}{3}x^3$ et pour $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$ on obtient $\dfrac{2}{3}x^3 \leqslant \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} \leqslant 0$ d'où $\boxed{\forall x \geqslant -\dfrac{1}{2}, \left|\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right| \leqslant \dfrac{2}{3}|x|^3}$

   (c) On pose $x = 1+u$ et on a alors $\dfrac{\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(1)}{x-1} = \dfrac{\dfrac{(1+u)\ln(1+u)}{u} - 1}{u} = \dfrac{(1+u)\ln(1+u) - u}{u^2} = \dfrac{\ln(1+u)}{u} + \dfrac{\ln(1+u) - u}{u^2}$

   Or u va tendre vers 0, donc on peut supposer que $u \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et d'après la question précédente on a

$-\dfrac{2u^3}{3} \leqslant \ln(1+u) - u + \dfrac{u^2}{2} \leqslant \dfrac{2u^3}{3}$ donc
$-\dfrac{u^2}{2} - \dfrac{2u^3}{3} \leqslant \ln(1+u) - u \leqslant -\dfrac{u^2}{2} + \dfrac{2u^3}{3}$ et en divisant par u^2 pour $u \neq 0$
$-\dfrac{1}{2} - \dfrac{2u}{3} \leqslant \dfrac{\ln(1+u)-u}{u^2} \leqslant -\dfrac{1}{2} + \dfrac{2u}{3}$ et d'après le théorème des gendarmes,
$\dfrac{\ln(1+u)-u}{u^2} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$

Comme $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1$, on obtient $\dfrac{\tilde{\varphi}(x)-\tilde{\varphi}(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$
$\boxed{\tilde{\varphi} \text{ est alors dérivable en 1 et } \tilde{\varphi}'(1) = \dfrac{1}{2}}$

(d) $\boxed{\Delta : y = \dfrac{1}{2}(x-1)+1 = \dfrac{x+1}{2}}$

8. (a) $(\ln x'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc $\boxed{\text{le logarithme népérien est concave sur } \mathbb{R}_+^*.}$

(b) On en déduit que la courbe représentative de la fonction logarithme népérien est en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente en 1 qui a pour équation $y = x - 1$ donc $\boxed{\ln(x) \leqslant x - 1 \text{ pour tout } x > 0.}$

(c) $\tilde{\varphi}'(x) = \dfrac{(1+\ln x)(x-1) - x\ln x}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} \geqslant 0$ d'après l'inégalité précédente.

x	0 $+\infty$
$\tilde{\varphi}'(x)$	$+$
$\tilde{\varphi}(x)$	$0 \nearrow +\infty$

De plus $\tilde{\varphi}(x) = \dfrac{\ln x}{1 - \dfrac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

(d) $\tilde{\varphi}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

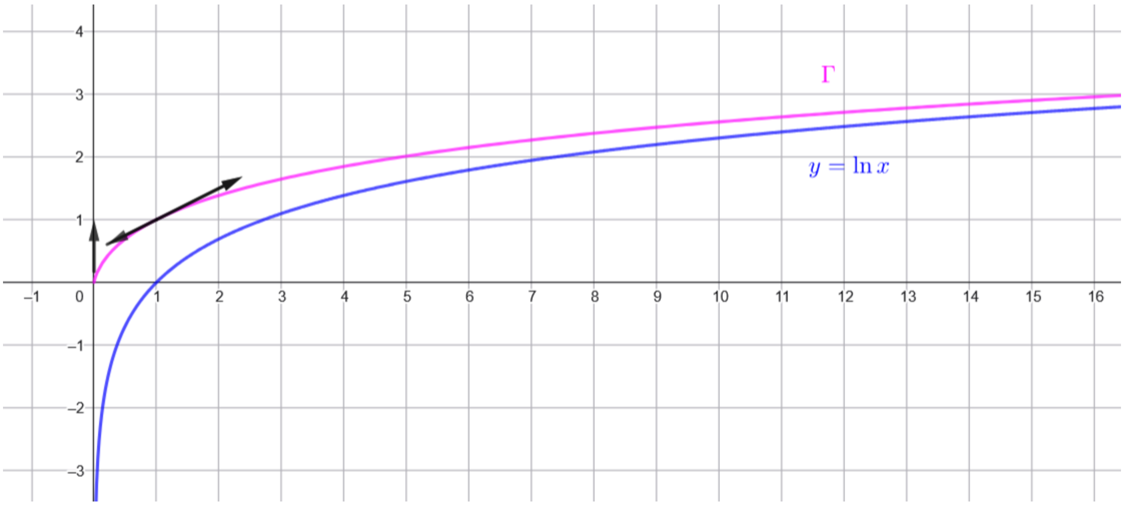
$\boxed{\tilde{\varphi} \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } \tilde{\varphi}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+}$

(e) $\tilde{\varphi}^{-1}$ est dérivable en toute valeur de x pour laquelle $\tilde{\varphi}'(x) \neq 0$ ce qui est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

$(\tilde{\varphi}^{-1})'(1) = \dfrac{1}{\tilde{\varphi}'(\tilde{\varphi}^{-1}(1))} = \dfrac{1}{\tilde{\varphi}'(1)} = 2$ car $\tilde{\varphi}(1) = 1$ donc $\tilde{\varphi}^{-1}(1) = 1$

9. $\tilde{\varphi}(x) - \ln x = \dfrac{x\ln x - (x-1)\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée et produit donc

$\boxed{\text{le graphe du logarithme népérien est asymptote au graphe } \Gamma \text{ de } \tilde{\varphi} \text{ en } +\infty}$


Γ
y = ln x