Correction du Test n° 12

Sujet A

1.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

   f est définie, continue, $\boxed{\text{dérivable sur chaque intervalle de } \mathbb{R}^*}$ par composée de fonctions qui le sont, avec $x \neq 0$.

   Pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = X^2\mathrm{e}^X$ avec $X = -\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ lorsque

   donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 0$ par croissances comparées et

   $\boxed{f \text{ est dérivable à droite en 0 d'après le théorème de la dérivée, avec } f'_d(0) = 0}$

   Pour $x < 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = X^2\mathrm{e}^X$ avec $X = \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ par croissances comparées et

   $\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 0 d'après le théorème de la dérivée, avec } f'_g(0) = 0.}$

   Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et donc sur } \mathbb{R}.}$

   Remarque f est continue en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ par composition. Mais comme on demande de démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ce n'est pas la peine d'étudier la continuité en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = (x+1)\ln(1+x)$ si $x \neq -1$ et $f(-1) = 0$.

   $\boxed{f \text{ est définie et continue sur }]-1, +\infty[}$ comme produit de fonctions qui le sont, avec $1 + x > 0$

   $f(x) = (x+1)\ln(1+x) = X\ln X$ avec $X = x + 1 \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} 0$

   donc $\boxed{\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)}$ par croissances comparées et $\boxed{f \text{ est continue en } -1^+.}$

   $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \ln(1+x) \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow -1^+$ donc

   $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } -1}$

Correction du Test n° 12

Sujet B

1.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

   f est définie, continue, dérivable de dérivée continue $\boxed{\text{sur chaque intervalle de } \mathbb{R}_+^*}$ par composée de fonctions qui le sont, avec $x \neq 0$ et $\boxed{\text{sur chaque intervalle de } \mathbb{R}_-^*}$ car c'est la fonction nulle.

   $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = X^2 \mathrm{e}^X$ avec $X = -\dfrac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$

   donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ par croissances comparées et f est dérivable en 0 d'après le théorème de la dérivée. Or $f'(0) = 0$ donc $\boxed{f' \text{ est continue en } 0}$ et finalement $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

   Remarque f est continue en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ par composition mais comme on demande de démontrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce n'est pas la peine d'étudier la continuité en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

   f est définie, continue, dérivable de dérivée continue $\boxed{\text{sur chaque intervalle de } \mathbb{R}_+^*}$ par composée de fonctions qui le sont, avec $x > 0$.

   $f'(x) = 2x \ln x + x$

   $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$ par somme et croissances comparées, donc f' est dérivable de dérivée continue en 0 avec $f'(0) = 0$ d'après le théorème de la limite de la dérivée et

   $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

   $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2 \ln x + 1 \longrightarrow -\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0$ donc $\boxed{f' \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$