Samedi 31 janvier 2026

Correction du devoir surveillé n° 4

Exercice 1 Partie A On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1. $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}$ donc $\boxed{A^2 = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2}$

2. Au rang 0, $A^0 = I_2 = 0 \times A + 1 \times I_2$ donc la propriété est vraie au rang 0 en posant $\boxed{a_0 = 0 \text{ et } b_0 = 1.}$
   Supposons qu'à un rang n, $A^n = a_nA + b_nI_2$. On a alors
   $A^{n+1} = A^n \times A = a_nA^2 + b_nA = a_n(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2) + b_nA = (\frac{5}{6}a_n + b_n)A + \frac{a_n}{6}I_2$ et on obtient l'existence de deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I_2$.
   On a démontré par récurrence que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } A^n = a_nA + b_nI_2.}$

3. D'après la question précédente on a $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n}{6}$ d'où $a_{n+2} = \frac{5}{6}a_{n+1} + \frac{a_n}{6}$. La suite (a_n) est alors récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6}$ a pour racine évidente 1 et l'autre racine vaut $-\frac{1}{6}$ en utilisant le produit des racines.
   On obtient $a_n = A + B\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ avec $a_0 = 0 = A + B$ et $a_1 = 1 = A - \frac{B}{6}$ donc $A = \frac{6}{7} = -B$
   $\boxed{a_n = \frac{6}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^n\right)}$ puis $\boxed{b_n = \frac{1}{6}a_{n-1} = \frac{1}{7}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right)}$

4. $A^n = a_nA + b_nI_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$
   Or $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$ donc $\boxed{(A^n) \text{ converge vers } \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}}$

Partie B

On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J^3 = J^2$, donc $\boxed{J^k = J^2 \text{ pour tout } k \geqslant 2}$

2. $B = \frac{1}{2}(J + I_3)$

3. Les matrices J et I_3 commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : $B^n = \dfrac{1}{2^n}(J+I_3)^n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} J^k I_3^{n-k}$. On isole dans cette somme les termes $k=0$ et $k=1$ et pour $k \geqslant 2$ on utilise $J^k = J^2$. On obtient $B^n = \dfrac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + J^2 \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\right)$ Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n$ donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 2^n - n - 1$ et $\boxed{B^n = \dfrac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + (2^n - n - 1)J^2\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$

4. $B^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{n}{2^n} & 1 - \frac{n+1}{2^n} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^n} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^n} = 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (B^n) \text{ converge vers } J^2.}$

Exercice 2 On considère la fonction f définie par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$

1. $x \mapsto \ln x$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1, la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\boxed{D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[}$

2. $x \mapsto \ln x$ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1, la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f est est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_f.

3. $f'x) = \mathrm{e}^u + xu'\mathrm{e}^u$ avec $u = \dfrac{1}{\ln x}$ et $u' = -\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = -\dfrac{1}{x\ln^2 x}$
$\boxed{f'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\ln^2 x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}}$

4. En 0^+ : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} = 1$ par composition puis $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x) = 0}$ par produit.
En 1^- : $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \ln x = 0^-$ donc $\displaystyle\lim_{x\to1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} = 0$ par composition puis $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = 0}$ par produit.
En 1^+ : $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \ln x = 0^+$ donc $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \frac{1}{\ln x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to1^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} = +\infty$ par composition puis $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty}$ par produit.
En $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}} = 1$ par composition puis $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ par produit.

5. $f'(x) = \dfrac{\ln^2 x - 1}{\ln^2 x}\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$ est du signe de $\ln^2 x - 1$:
$\ln^x -1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$ ou $\ln x < -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}$ ou $x < \mathrm{e}^{-1}$

x	0		e^{-1}		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

$f(e^{-1}) = e^{-1}e^{-1} = e^{-2}$ et $f(e) = ee = e^2$

6. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 1.}$

7. On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de la fonction f sur $[0,1]$.

   (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ donc la fonction f est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ en posant

   $$\boxed{\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), x \in]0,1[\\ 0, x = 1 \\ 0, x = 0 \end{cases}}$$

   (b) $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = e^{\frac{1}{\ln x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{\tilde{f} \text{ est dérivable en } 0^+ \text{ et } \tilde{f}'(0) = 1}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln^2 x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}} = 1$ par composition puis $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = 1}$ par produit donc $\tilde{f}'$ est continue en 0^+.

   $f'(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} - \dfrac{1}{\ln^2 x} e^{\frac{1}{\ln x}}$ En posant $X = \dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} -\infty$, $\dfrac{1}{\ln^2 x} e^{\frac{1}{\ln x}} = X^2 e^X \underset{X\to -\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.

   Or $\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{\ln x}} = 0$ par composition puis $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = 0}$ par somme donc $\tilde{f}$ est dérivable en 1^- par le théorème de la limite de la dérivée et $\tilde{f}'$ est continue en 1^-

   Finalement $\boxed{\tilde{f} \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,1]}$

Exercice 3 $\quad f(x) = \dfrac{x}{1 + e^x}$

I. Étude d'une fonction auxiliaire : $\quad g : x \mapsto 1 + e^{-x} - x$.

1. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty}$, par opérations sur les limites.

   $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty}$, par opérations sur les limites.

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$:

   $$g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \text{ car } e^{-x} > 0.$$

On en déduit que g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection monotone :

$\boxed{g \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur l'intervalle } g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}}$.

3. Comme g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, 0 admet un unique antécédent par g :

   $\boxed{\text{il existe un unique réel } \alpha \text{ vérifiant } g(\alpha) = 0}$.

   Le nombre α vérifie $1 + \mathrm{e}^{-\alpha} - \alpha = 0 \iff \alpha = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}$. Donc $\alpha > 1$, car $\mathrm{e}^{-\alpha} > 0$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$.

   Finalement, on a bien $\boxed{1 < \alpha < 1 + \mathrm{e}^{-1}}$

II. Approximation de α : $h : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$, $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = h(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $h(x) = x \iff 1 + \mathrm{e}^{-x} = x \iff 1 + \mathrm{e}^{-x} - x = 0 \iff g(x) = 0$.

   D'après la question I. 3. α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.

   Donc $\boxed{\alpha \text{ est bien l'unique solution de l'équation } h(x) = x}$.

2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus, $\forall x \geq 1$:

   $h'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $|h'(x)| = \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-1}$, car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   D'après l'inégalité des accroissements finis, $\forall x, x' \geq 1$, $|h(x) - h(x')| \leq \mathrm{e}^{-1}|x - x'|$.

   $h(\alpha) = \alpha \geq 1$, donc $\boxed{\forall x \geq 1, \quad |h(x) - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-1}|x - \alpha|}$.

3. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}_n$: "$a_n \geq 1$ et $|a_n - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}$" est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   — $a_0 = 1$ et $|a_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-1}$ car $1 < \alpha < 1 + \mathrm{e}^{-1}$ (d'après la question I.3.). On en déduit que $\mathscr{P}_0$ est vraie.

   — Supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ (HR), et montrons que $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

   $a_{n+1} = h(a_n) = 1 + \mathrm{e}^{-a_n} > 1$ car $\mathrm{e}^{-a_n} > 0$.

   D'après la question II. 2., comme $a_n \geq 1$ (par (HR)), on a :

   $$|a_{n+1} - \alpha| = |h(a_n) - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-1}|a_n - \alpha|.$$

   Par (HR), $|a_n - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}$, donc $|a_{n+1} - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+2)}$, car $\mathrm{e}^{-1} > 0$.
   Ainsi, l'hérédité est vérifiée.

— Par récurrence, nous avons montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 1 \text{ et } |a_n - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}}$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}$.

   D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

   De plus, comme la fonction exponentielle est croissante, $|a_n - \alpha| \leq 10^{-3}$ si
   $$\mathrm{e}^{-(n+1)} \leq 10^{-3} \iff -(n+1) \leq -3\ln(10) \iff n \geq 3\ln(10) - 1.$$

   $3\ln(10) - 1 < 5.93$, donc $\boxed{a_6 \text{ est une valeur approchée } \alpha \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

III. Étude de la fonction f :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + \mathrm{e}^x > 0$. Donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$, par opérations sur les limites.

   $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$, par croissance comparée et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-x}} = 1$

   Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ par produit.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1 + \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}$, qui s'annule ssi $g(x)$ s'annule, car $\mathrm{e}^x > 0$.

   D'après I. 3., $\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } f'(x) = 0}$.

   De plus, $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}$, donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{1 + \mathrm{e}^\alpha} = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-\alpha}}{1 + \mathrm{e}^\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha} \times \dfrac{1 + \mathrm{e}^\alpha}{1 + \mathrm{e}^\alpha} = \mathrm{e}^{-\alpha}$.

   Donc $\boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$.

4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$ et $(1 + \mathrm{e}^x)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. D'après I. 2., la fonction g est continue, strictement décroissante et s'annule en α, d'où :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0

   D'aprés ce tableau de variation, f admet un unique extremum local qui est $f(\alpha)$, et qui est un maximum global.

5. $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

   On en déduit que la courbe représentative de f admet pour tangente en 0 la droite $\boxed{\mathcal{T}_0 :\ y = \dfrac{x}{2}}$.

   De plus, $f(x) - \dfrac{x}{2} = x\dfrac{1 - e^x}{2(1 + e^x)}$ qui est du signe de $x(1 - e^x)$ sur $\mathbb{R}$ donc toujours négatif car $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

   Donc $\boxed{\text{la courbe de } f \text{ se situe toujours en dessous de sa tangente } \mathcal{T}_0}$.

6. $\forall x < 0,\ f(x) - x = \dfrac{x}{1 + e^x} - x = \dfrac{-xe^x}{1 + e^x} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissances comparées et opŕations sur les limites.

   Donc

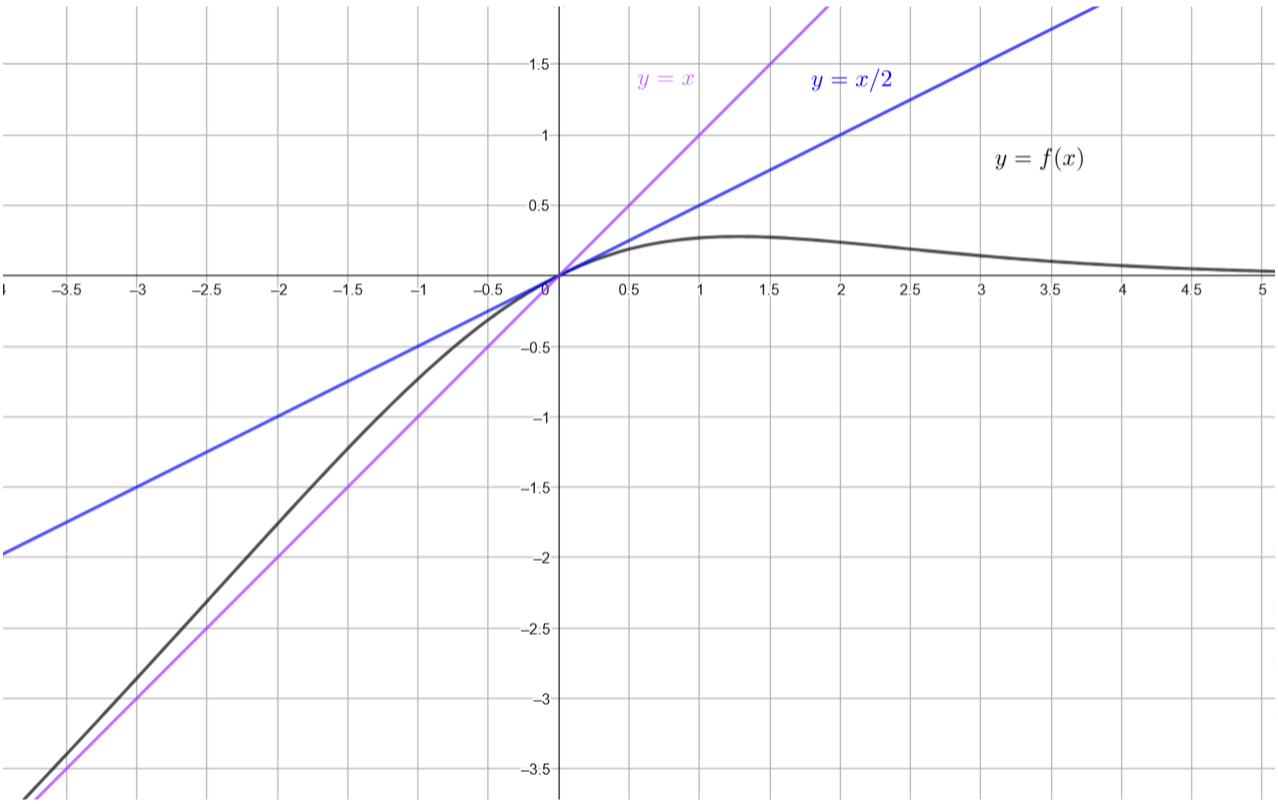
   $\boxed{\text{la droite } \Delta \text{ d'équation } y = x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty}$.

   De plus $f(x) - x$ est du signe de $-x$ car $e^x > 0$.

   Donc

   $\boxed{\text{La courbe de } f \text{ est au dessus de son asymptote } \Delta \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et en dessous sur }]0, +\infty[}$.

7.



IV. Étude d'une primitive On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, F est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, qui s'annule en 0. Donc $\boxed{F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+}$.

   $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $1 + t \geq \mathrm{e}^t > 0$, donc $f(t) = \dfrac{t}{1+\mathrm{e}^t} \leq \dfrac{t}{\mathrm{e}^t}$ (car $t \geq 0$).

   Par croissance de l'intégrale, on a : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) \leq \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, par intégration par parties, on a :

   $\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1 \leq 1$, car $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $x \geq 0$.

   Donc $\boxed{F \text{ est majorée par 1 sur } \mathbb{R}_+}$.

   De plus, $F' = f \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc F est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{F \text{ admet une limite finie } \ell \text{ en } +\infty}$.