Samedi 31 janvier 2026

Devoir surveillé n° 4

Ce devoir est constitué de trois exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 **11.5 points** : **A. 1.** 0.5 **A. 2.** 1.5 **A. 3.** 2.5 **A. 4.** 1.5 **B. 1.** 1 **B. 2.** 0.5 **B. 3.** 2.5 **B. 4.** 1.5

On note I_n la matrice identité d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie A On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1. Déterminer deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_2$.
2. Démontrer que,$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_2$.
3. Déterminer des relations de récurrence sur les suites (a_n) et (b_n), puis en déduire les valeurs de a_n et b_n en fonction de n.
4. Montrer que la suite de matrices (A^n) converge et donner sa limite.

Partie B

On considère les matrices $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Écrire B comme combinaison linéaire des matrices I_3 et J.
3. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que la suite (B^n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 **9 points** : **1.** 0.5 **2.** 0.5 **3.** 1 **4.** 2 **5.** 1.5 **6.** 0.5 **7.(a)** 0.5 **7.(b)** 1 **7.(c)** 1.5

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_f.
3. Calculer la dérivée f' de f.
4. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f.
5. Déterminer le tableau de variations complet de la fonction f.
6. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 1 ?
7. On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de la fonction f sur $[0,1]$.
   (a) Justifier l'existence de $\tilde{f}$ et donner sa définition.
   (b) Étudier la dérivabilité de $\tilde{f}$ en 0^+
   (c) $\tilde{f}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$?

Exercice 3 **19,5 points** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^x}$

I. Étude d'une fonction auxiliaire **3,5 points** **1.** 1 **2.** 1.5 **3.** 1

On considère la fonction $g : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x} - x$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
3. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α tel que $g(\alpha) = 0$.
   Établir que $\alpha \in \left]1, 1+\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$.

II. Approximation de α **5 points** **1.** 0.5 **2.** 1.5 **3.** 1.5 **4.** 0.5 **5.** 1

On considère la fonction $h : x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$,

et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = h(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Jusitifer que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.
2. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\quad |h(x) - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-1}|x - \alpha|$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$ et $|a_n - \alpha| \leq \mathrm{e}^{-(n+1)}$.
4. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Déterminer alors un entier naturel p tel que a_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} près. *On admettra que* $2.30 < \ln(10) < 2.31$.

III. Étude de la fonction f **8 points** **1** 0.5 **2.** 1.5 **3.** 1 **4.** 1 **5. (a)** 0.5 **5. (b)** 1 **6. (a)** 1 **6. (b)** 0.5 **7.** 1

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f'(x) = 0$, et que $f(\alpha) = \alpha - 1$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f et préciser si f admet des extrema locaux.
5. (a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f en $(0, 0)$.
   (b) Étudier la position relative de la courbe par rapport à cette tangente.
6. (a) Démontrer que la courbe de f admet une asymptote d'équation $y = x$ en $-\infty$.
   (b) Étudier la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.
7. Représenter alors schématiquement l'allure de la courbe de f sur un dessin, en faisant apparaitre les éléments de l'étude précédente utiles au tracé.

IV. Étude d'une primitive **3 points** **1.** 1.5 **2.** 1.5

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) \leq \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.
2. En déduire que F est majorée sur $\mathbb{R}_+$, puis que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$.