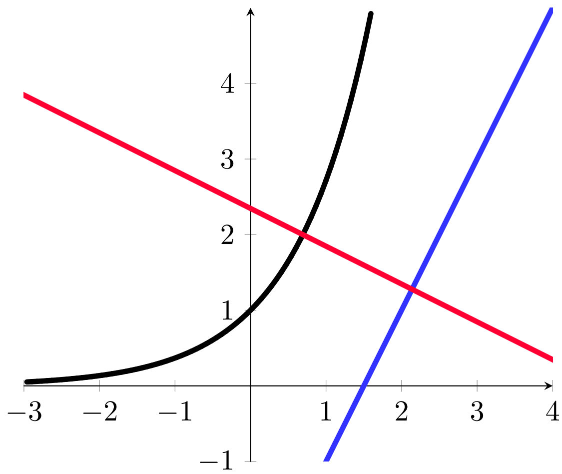
Correction du devoir maison n° 13

Exercice 1 On note C la courbe représentative de la fonction exponentielle, et D la droite d'équation réduite $y = 2x - 3$.



1. $d(M, D) = \dfrac{|-2x_0 + e^{x_0} + 3|}{\sqrt{5}}$

On pose $g(x) = e^x - 2x + 3$. g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
$g'(x) = e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln 2$.

La fonction g admet donc un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en $x_0 = \ln 2$ et
$g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 + 3 = 5 - \ln 4 = \ln\left(\dfrac{e^5}{4}\right) > 0$ car $\dfrac{e^5}{4} > 1$
donc g est positive sur $\mathbb{R}$ et

$\boxed{\text{la distance de M à D est minimale au point M } (\ln 2, 2). \text{ Cette distance est égale à } \dfrac{5-\ln 4}{\sqrt{5}}.}$

2. La tangente à la courbe C en $x_0 = \ln 2$ a pour coefficient directeur $e^{\ln 2} = 2$, donc
$\boxed{\text{cette tangente est parallèle à la droite D.}}$

Exercice 2 On considère la droite D par l'équation $x + y + 1 = 0$ et pour tout réel m, on note C_m l'ensemble des points M$(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation
$x^2 + y^2 + 2mx + 2y + 2 = 0$.

1. $x^2 + y^2 + 2mx + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + m)^2 + (y + 1)^2 = m^2 - 1$
   - Si $m^2 > 1$ i.e $m \notin [-1, 1]$ alors l'ensemble C_m est le cercle de centre $(-m, -1)$ et de rayon $\sqrt{m^2 - 1}$.
   - Si $m^2 = 1$ i.e $m = 1$ ou $m = -1$ alors l'ensemble C_m est un point de coordonnées $(-m, -1)$.
   - Si $m^2 < 1$ i.e $m \in [-1, 1]$ alors l'ensemble C_m est vide.
2. On suppose que $|m| > 1$.
   La distance de la droite D au centre du cercle C_m est $d = \dfrac{|m|}{\sqrt{2}}$ et
   $d < R = \sqrt{m^2 - 1} \Leftrightarrow m^2 < 2m^2 - 2 \Leftrightarrow m^2 > 2 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}$.

   Donc si $|m| > \sqrt{2}$, D et C_m sont sécants en deux points. Si $m = \pm\sqrt{2}$, D et C_m sont tangents en un point et si $|m| < \sqrt{2}, D \cap C_m = \emptyset$

   Remarque On peut aussi déterminer l'intersection :

   $$\mathrm{M}(x; y) \in C_m \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 & = & 0 \\ (x+m)^2 + (y+1)^2 & = & m^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-1 \\ 2x^2 + 2mx + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 4m^2 - 8 = 4(m^2-2)$ Donc, si $|m| \geqslant \sqrt{2}$, $C_m \cap D$ est constitué de 2 points

$$\begin{cases} x = \dfrac{-m+\sqrt{m^2-2}}{2} \quad ou \quad x = \dfrac{-m-\sqrt{m^2-2}}{2} \\ y = 1-x \end{cases}$$

Si $1 < |m| < \sqrt{2}$ alors $C_m \cap D = \emptyset$

Exercice 3 On considère l'équation : $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1. $x^2 + y^2 - 4kx - 2y + 4k = 0 \Leftrightarrow (x-2k)^2 + (y-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = (2k-1)^2$
   $\boxed{\text{Cette équation est celle du cercle } C_k \text{ de centre } \Omega_k(2k,1) \text{ et de rayon } |2k-1|}$, éventuellement réduit à un point si $k = \dfrac{1}{2}$.
2. $\Omega_k(2k,1) = (0+2k, 1+0k)$. L'ensemble des centres des cercles C_k est la droite passant par $A(0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}(1,0)$
3. Si $k = \dfrac{1}{2}$ alors le cercle $C_{\frac{1}{2}}$ est réduit au point $(1,1)$.
   Or tous les cercles C_k contiennent ce point. Comme leurs centres sont alignés, ils sont alors tangents deux à deux en ce point.