Devoir maison n$^{\text{o}}$ 15

A rendre le jeudi 5 mars 2026

Exercice 1 Pour tout $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on note $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On considère, pour tout entier naturel $n > 1$, le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (b) Déterminer les racines du polynôme Q_n.
   (c) Vérifier que ces racines sont simples, et en déduire la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.

2. On considère le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k, \quad n > 1.$
   (a) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
   (b) En déduire les racines de P_n et vérifier qu'elles sont simples.
   (c) Calculer la somme des racines de P_n.
   (d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

3. (a) Montrer que, $\forall\, x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[,\ \sin x \leqslant x \leqslant \tan x$
   (b) En déduire que, $\forall\, x \in]0, \dfrac{\pi}{2}[,\ \operatorname{cotan}^2 x \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2 x$
   (c) En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k^2}$ pour $k \geqslant 1$, puis la valeur de la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Exercice 2 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble P_m par son équation cartésienne

$$(4+m^2)x + (4-m^2)y - 4mz = m + 8.$$

On note Ω le point de coordonnées $(0; 1; -\dfrac{1}{4})$ et D la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{i}$.

1. Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble P_m est un plan.
2. Soit Ω_x le point de la droite D dont la première coordonnée vaut x.
   Montrer que la distance entre Ω_x et P_m est égale à $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$
3. Déterminer toutes les sphères de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à D et telles que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m soit tangent à ces sphères.
   On notera S_1 celle dont le centre a la première coordonnée la plus petite. Déterminer le centre et une équation cartésienne de S_1.

Exercice 3 On considère le plan P d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$, P' le plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ passant par le point $A(2; 0; 0)$.

1. Montrer que l'intersection D des plan P et P' est une droite dont on donnera une représentation paramétrique.
2. Pour tout réel m, on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $(1 + m)x + (2 - m)y + (-1 + 2m)z + 1 - 2m = 0$.
   (a) Justifier que, pour tout réel m, l'ensemble P_m est un plan.
   (b) Montrer que la droite D est incluse dans P_m, pour tout réel m.
   (c) En déduire un vecteur directeur de P_m puis en déterminer un autre.
   (d) Existe-t-il un plan P_m qui soit perpendiculaire au plan P ?
3. On considère l'ensemble S des points $M(x; y; z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$.
   (a) Déterminer la nature de l'ensemble S.
   (b) Montrer que $C = P_{\frac{1}{2}} \cap S$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon r.
   (c) Après avoir vérifié que $O \in C$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite tangente au cercle C en O.