Exercices École Ouverte PTSI

1 Polynômes

Exercice 1 Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par B.

1. $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1$
2. $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, B = 2X^3 - X^2 - X + 1$
3. $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n, B = X^3 - 2X + 1$ où n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations 1. $z^5 = 1 + \mathrm{i}$ 2. $z^8 + z^4 + 1 = 0$
3. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$ 4. $(z + 1)^3 - (z - 1)^3 = 0$.

Exercice 3 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. Décomposer $X^4 - 6X^3 + 9X^2$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire une décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Soit $P = (1 + X)^5 - (1 - X)^5$.

1. Développer le polynôme P et montrer que 0 est racine de P.
2. Décomposer P en irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 L'objectif est de déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant :

$$(E) : \quad P(X) = P'(X)P''(X).$$

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant l'équation (E).
   (a) Déterminer le degré de P.
   (b) Déterminer le coefficient dominant de P.
   (c) Justifier que le polynôme P' admet une racine α dans $\mathbb{C}$. Montrer que $P(\alpha) = 0$.
   (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), montrer que $P''(\alpha) = 0$.
   (e) Déduire de tout ce qui précède, la factorisation de P en irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
2. (Synthèse) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère le polynôme $P_n = (X + 1)^n - 1$.

1. Déterminer les racines de P_n dans $\mathbb{C}$, puis factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Montrer qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = XQ_n$.
   On écrira Q_n sous forme développée et factorisée.
3. En évaluant $Q_n(0)$ de deux façons différentes, calculer le produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 6 On cherche à déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la relation

$$(E) : P(X^2) = (X^3 + 1)P(X).$$

On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$

1. Démontrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme $X^3 - 1$ sont solutions de (E).
2. Soit P un polynôme non nul qui vérifie la relation (E).
   (a) Déterminer le degré de P.
   (b) Démontrer que $P(1) = 0$, puis que $P(\mathrm{j}) = P(\mathrm{j}^2) = 0$.
3. Conclure : quels sont les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ solutions de (E) ?

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(n\theta) \neq 0$.

On considère le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1. Justifier que $P = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X\right)^n - \left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}X\right)^n\right]$
2. En déduire les racines du polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que ces racines sont réelles.
4. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

2 Géométrie

Exercice 1 Soient $A(1; 1), B(3; 7)$ et $C(-1; 3)$ trois points du plan.

1. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médianes du triangle ABC.
   (b) Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?
2. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux médiatrices du triangle ABC.
   (b) Quelles sont les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC ?
3. (a) Déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle ABC.
   (b) Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC ?
4. Vérifier que H, G et Ω sont alignés.

Exercice 2 Soit $ABCD$ un carré de côté 1 . Pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, on considère les points P_λ sur $[AB]$ et Q_λ sur $[BC]$ tels que $BP_\lambda = BQ_\lambda = \lambda$.
On note H_λ le projeté orthogonal de B sur la droite $(P_\lambda C)$.
On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

1. Donner les coordonnées des points $B, C, A, D, P_\lambda, Q_\lambda$ dans le repère $\mathcal{R}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(P_\lambda C)$ puis une équation cartésienne de la droite $(H_\lambda B)$
3. Calculer les coordonnées de H_λ.
4. En déduire que les droites $(H_\lambda Q_\lambda)$ et $(H_\lambda D)$ sont perpendiculaires pour tout $\lambda \in]0, 1[$.

Exercice 3 Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère le point A$(-2, 0)$, la droite D passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1, 1)$, le cercle C de centre $\Omega(2, 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite D.
2. La droite D et le cercle C sont-ils sécants ?
3. Déterminer une équation cartésienne du cercle C.
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de diamètre $[A\Omega]$.
5. Déterminer l'intersection des cercles C et Γ.
6. Quel est l'ensemble des points T du cercle C tels que la droite (AT) soit tangente au cercle C en T ?

Exercice 4 Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ et $A(4, -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle C. On note B et C les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathscr{C}$. Calculer la distance BC.

Exercice 5 L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$. On considère les quatre points $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$, $C(2, 2, 2)$ et $I(0, 1, -1)$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b. Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.

2. Soit Q le plan d'équation :$x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan de repère $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{k})$.

a. Les Q et Q' sont-ils sécants ?

b. Donner un point E et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite d'intersection Δ des plans Q et Q'.

3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.

4. On considère les points $J(-2, 0, 0)$ et $K(1, 0, 1)$.

Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite (JK).

Exercice 6 On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(0,0,0)B(2,1,-1)$ et $C(1,1,1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Déterminer le rayon de la sphère de centre $M_k(0,0,k)$ tangente au plan (ABC).

   Combien y a-t-il de sphères de rayon 2 parmi celles-ci ? On note S celle correspondant à la plus grande valeur de k.
4. Déterminer l'ensemble des points $D(x,y,z)$ vérifiant $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0$ (on en donnera une équation paramétrique).
5. Parmi les points de l'ensemble précédent, combien appartiennent au plan (ABC) ? Que représentent-ils alors ?
6. On note désormais $D(2,-1,1)$. Déterminer la distance de D aux trois points A, B et C, ainsi que les coordonnées du projeté orthogonal de D sur (ABC), et la distance de D à ce dernier.
7. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
8. Déterminer une équation du plan tangent à S, perpendiculaire à (ABC) et à (BCD).
9. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et D (droites passant par le point et perpendiculaires à la face opposée) dans le tétraèdre $ABCD$. Montrer que ces droites sont sécantes en un point H appartenant également à la hauteur issue de B.
10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'unique droite perpendiculaire simultanément à (AD) et à (BC) et vérifier que H appartient à cette droite.