

Correction École Ouverte PTSI

1 Polynômes

Exercice 1

1. $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1$

$$Q = X^2 - 4X + 7 \text{ et } R = -3X - 8$$

2. $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, B = 2X^3 - X^2 - X + 1$

$$Q = 13X + \frac{25}{2} \text{ et } R = \frac{29X^2 - 5X - 23}{2}$$

3. $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n = X^n(X^2 + X - 1), B = X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$

On va d'abord diviser X^n par $X - 1$: $X^n = (X - 1)Q_1 + R_1$ on aura ensuite, en multipliant par $X^2 + X - 1$, $A = BQ + R$ avec $Q = Q_1$ et $R = (X^2 + X - 1)R_1$.

$X^n = (X - 1)Q_1 + R_1$ avec R_1 constant et pour $X = 1$ on obtient $R_1 = 1$ puis

$$X^n - 1 = (X - 1)Q_1$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} X^k = \frac{X^n - 1}{X - 1}$ donc $Q_1 = Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ et $R = X^2 + X - 1$

Exercice 2 1. $z^5 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ On pose $z = re^{i\theta}$

$$z^5 = 1 + i \Leftrightarrow r^5 e^{5i\theta} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^5 = 2^{\frac{1}{10}} \\ 5\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2^{\frac{1}{10}} \\ \theta = \frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\}$$

2. $z^8 + z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z + 1 = 0$ avec $Z = z^4 \Leftrightarrow Z = j$ ou $Z = \bar{j} \Leftrightarrow z^4 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ou $z^4 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$$S = \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$$

3. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4z + 5)^2 = i^2(z + 1)^2$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = i(z + 1) \text{ ou } z^2 - 4z + 5 = -i(z + 1)$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (4 + i)z + 5 - i = 0 \text{ ou } z^2 + (i - 4)z + 5 + i = 0$$

$$\Delta_1 = -5 + 12i = (x + iy)^2 \text{ ou } \Delta_2 = \overline{\Delta_1}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ 2ixy = 12i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = (2 + 3i)^2 \text{ et } \Delta_2 = (2 - 3i)^2$$

$$S = \{3 + 2i, 3 - 2i, 1 - i, 1 + i\}$$

4. $(z + 1)^3 - (z - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow Z^3 = 1$ où $Z = \frac{z+1}{z-1}$ avec $z \neq 1 \Leftrightarrow Z = a$ où $a = 1, j, \bar{j}$

On résout $\frac{z+1}{z-1} = a, z \neq 1 \Leftrightarrow z = \frac{1+a}{a-1}$ pour $a \neq 1$

$$S = \left\{ \frac{1+j}{j-1}, \frac{1+\bar{j}}{\bar{j}-1} \right\}$$

Exercice 3 Soit $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$.

1. $X^4 - 6X^3 + 9X^2 = X^2(X^2 - 6X + 9) = X^2(X - 3)^2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. $P = X^2(X - 3)^2 + 9 = [X(X - 3) + 3i][X(X - 3) - 3i] =$

$$(X^2 - 3X + 3i)(X^2 - 3X - 3i)$$

$$P =$$

$$\left(X - \frac{1}{2}(3 - (2 - i)\sqrt{3})\right) \left(X - \frac{1}{2}(3 + (2 - i)\sqrt{3})\right) \left(X - \frac{1}{2}(3 - (2 + i)\sqrt{3})\right) \left(X - \frac{1}{2}(3 + (2 + i)\sqrt{3})\right)$$

$$\text{dans } \mathbb{C}[X]$$

$$P = (X^2 - (3 - 2\sqrt{3})X + 24 + 12\sqrt{3})(X^2 - (3 + 2\sqrt{3})X + 24 - 12\sqrt{3}) \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

Exercice 4 Soit $P = (1 + X)^5 - (1 - X)^5$.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton pour $(1 + X)^5$ et pour $(1 - X)^5$, on constate que les puissances paires de X dans P ont un coefficient nul et on obtient

$$P = 2(X^5 + 10X^3 + 5X) = 2X(X^4 + 10X^2 + 5).$$

2. $X^2 + 10X + 5 = 0 \Leftrightarrow X = -5 + 2\sqrt{5}$ ou $X = -5 - 2\sqrt{5}$

$$\text{Puis } X^2 = -5 + 2\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow X = i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ ou } X = -i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \text{ et}$$

$$X^2 = -5 - 2\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow X = i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \text{ et } X = -i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

$$P = 2X(X - i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}})(X + i\sqrt{5 - 2\sqrt{5}})(X - i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}})(X + i\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}) \text{ dans } \mathbb{C}[X]$$

$$P = 2X(X^2 + 5 - 2\sqrt{5})(X^2 + 5 + 2\sqrt{5}) \text{ dans } \mathbb{R}[X].$$

Exercice 5

1. (Analyse) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et vérifiant l'équation (E).

- (a) On pose $n = \deg(P)$. Comme P est non nul alors $n \in \mathbb{N}$.

$$P'(X)P''(X) = P(X) \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ donc } P' \text{ et } P'' \text{ sont non nuls, car sinon } P = 0_{\mathbb{C}[X]}.$$

$$\text{Donc } \deg(P') = n - 1 \geq 0, \deg(P'') = n - 2 \geq 0 \text{ et on a :}$$

$$\deg(P) = \deg(P'P'') \Leftrightarrow n = (n - 1) + (n - 2) \Leftrightarrow n = 3.$$

$$\text{Donc } P \text{ est un polynôme de degré 3.}$$

- (b) On peut donc écrire $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$, avec $a \neq 0$. Et on a :

$$P' = 3aX^2 + 2bX + c, P'' = 6aX + 2b \text{ et le coefficient dominant de } P'P'' \text{ est } 18a^2.$$

$$\text{Comme } P'(X)P''(X) = P(X) \text{ et } a \neq 0, \text{ on a : } 18a^2 = a \Leftrightarrow a = \frac{1}{18}.$$

$$\text{Donc le coefficient dominant de } P \text{ est } a = \frac{1}{18}.$$

- (c) $\deg(P') = 2$ donc P' admet au moins une racine α dans $\mathbb{C}$.

$$\text{Comme } P \text{ vérifie (E), on a : } P(\alpha) = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} P''(\alpha) = 0. \text{ Donc } \alpha \text{ est racine de } P.$$

- (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité (E), on obtient :

$$P'(X) = P''(X)P''(X) + P'(X)P^{(3)}(X) \text{ donc } [P''(\alpha)]^2 = \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} - \underbrace{P'(\alpha)}_{=0} P^{(3)}(\alpha) = 0.$$

$$\text{Donc on a bien } P''(\alpha) = 0.$$

(e) $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = 0$ donc α est racine de P de multiplicité au moins 3.

Comme le nombre de racines de P comptées avec multiplicités est majoré par $\deg(P) = 3$, α est racine de P de multiplicité 3 et α est l'unique racine de P dans $\mathbb{C}$.

Donc $P = \frac{1}{18}(X - \alpha)^3$, car le coefficient dominant de P est $a = \frac{1}{18}$.

2. (Synthèse) Soit $P = \frac{1}{18}(X - \alpha)^3$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On a :

$$P' = \frac{3}{18}(X - \alpha)^2, P'' = \frac{6}{18}(X - \alpha) \text{ et } P'P'' = \frac{1}{18}(X - \alpha)^3. \text{ Donc } P'(X)P''(X) = P(X).$$

Si P est nul, cette égalité est encore vérifiée.

Par analyse-synthèse, on a montré que l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$S = \left\{ \frac{1}{18}(X - \alpha)^3, \alpha \in \mathbb{C} \right\} \cup \{0_{\mathbb{C}[X]}\}.$$

Exercice 5

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$P_n(z) = 0 \iff (z + 1)^n = 1 \iff z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 = e^{\frac{ik\pi}{n}} \left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right), k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{C}} = \left\{ 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \text{ et } P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right).$$

2. $\sin(0) = 0$ donc $P_n = X \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right).$

De plus, comme $P_n = (X + 1)^n - 1$, par la formule du binôme on a :

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^k = X \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} X^{k-1} \stackrel{j=k-1}{=} X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} X^j.$$

$$\text{Donc } P_n = XQ_n, \text{ où } Q_n = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} X^k.$$

3. On a donc $Q_n(0) = \prod_{k=1}^{n-1} \left(-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) = \binom{n}{1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} 0^k}_{=0}.$

Donc $(-2i)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}} = n$. Comme

$$(-2i)^{n-1} = 2^{n-1} \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} \right)^{n-1} = 2^{n-1} e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}}$$

$$\text{et } \prod_{k=1}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = e^{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{ik\pi}{n}}, \text{ avec } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{ik\pi}{n} = \frac{i\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{i\pi}{n} \frac{n(n-1)}{2} \text{ on a}$$

$$2^{n-1} e^{-i\frac{(n-1)\pi}{2}} e^{i\frac{(n-1)\pi}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n \text{ donc } \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 6 On cherche à déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient la relation

$$(E) : P(X^2) = (X^3 + 1)P(X).$$

On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Le polynôme nul vérifie simplement la relation et, pour $P(X) = X^3 - 1$, on a $P(X^2) = X^6 - 1$, puis $(X^3 + 1)P(X) = (X^3 + 1)(X^3 - 1) = X^6 - 1$. Ce polynôme est aussi solution.
2. Soit P un polynôme non nul qui vérifie la relation (E) .
 - (a) Soit $n = \deg(P)$, alors $P(X^2)$ est de degré $2n$ et $(X^3 + 1)P(X)$ est de degré $n + 3$.
On doit donc avoir $2n = n + 3$, soit $n = 3$.
 - (b) En évaluant la relation en $X = 1$, on a $P(1^2) = 2P(1)$ d'où $P(1) = 0$.
Pour $X = j$ on a $P(j^2) = (j^3 + 1)P(j) = 2P(j)$ car $j^3 = 1$
Pour $X = j^2$ on a $P(j^4) = (j^6 + 1)P(j^2)$ d'où $P(j) = 2P(j^2)$ car $j^3 = 1$
Finalement $P(j^2) = 2P(j) = 4P(j^2)$ donc $P(j^2) = P(j) = 0$
3. On a donc montré que si un polynôme vérifie la relation (E) , alors il est soit nul, soit s'écrit sous la forme $P(X) = \alpha (X - 1)(X - j)(X - j^2) = \alpha (X^3 - 1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ car il est de degré 3 et admet 3 racines distinctes $1, j, j^2$.

Il reste à vérifier la réciproque, ce qui est fait dans la première question. On a donc montré que l'ensemble des solutions de la relation (E) est $\left\{ \alpha (X^3 - 1) ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(n\theta) \neq 0$.

On considère le polynôme $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

1. D'après la formule d'Euler, $\sin(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i}$ donc

$$P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} X^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-ik\theta} X^k =$$

$$\frac{1}{2i} [(1 + e^{i\theta} X)^n - (1 + e^{-i\theta} X)^n] \text{ d'après la formule du binôme de Newton.}$$
2. $P(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i} [(1 + e^{i\theta} X)^n - (1 + e^{-i\theta} X)^n] = 0 \Leftrightarrow (1 + e^{i\theta} X)^n = (1 + e^{-i\theta} X)^n \Leftrightarrow$

$$Z^n = 1 \text{ en posant } Z = \frac{1 + e^{i\theta} X}{1 + e^{-i\theta} X} \text{ pour } 1 + e^{-i\theta} X \neq 0 \text{ i.e } X \neq -e^{i\theta}$$

On vérifie que $P(-e^{i\theta}) = \frac{(1 - e^{2i\theta})^n}{2i} \neq 0$ car $\theta \neq k\pi$ sinon on aurait $\sin(n\theta) = 0$ ce qui est impossible.

$$Z^n = 1 \Leftrightarrow Z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

$$\frac{1 + e^{i\theta} X}{1 + e^{-i\theta} X} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow 1 + e^{i\theta} X = e^{\frac{2ik\pi}{n}} (1 + e^{-i\theta} X) \Leftrightarrow X (e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1$$

Or $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{k\pi}{n} + m\pi$ ce qui donnerait $\sin(n\theta) = 0$ ce qui est impossible.

De plus P est de degré n car $\sin(n\theta) \neq 0$.

Donc les n racines de P dans $\mathbb{C}[X]$ sont
$$X_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

$$3. X_k = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} (e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}})}{e^{\frac{ik\pi}{n}} (e^{-\frac{ik\pi}{n}} e^{i\theta} - e^{\frac{ik\pi}{n}} e^{-i\theta})} = \frac{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} = -\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} \in \mathbb{R}$$

4. Le coefficient dominant de P est $\sin(n\theta)$ et son degré est n , la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est donc

$$P = \sin(n\theta) \prod_{k=0}^{n-1} \left(X + \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n} - \theta\right)} \right)$$

2 Géométrie

Exercice 1 Soient $A(1; 1)$, $B(3; 7)$ et $C(-1; 3)$ trois points du plan.

$\overrightarrow{AB}(2, 6)$ $\overrightarrow{AC}(-2, 2)$ $I(2, 4)$ milieu de $[AB]$, $J(0, 2)$ milieu de $[AC]$

1. (a) Équation de (IC) : $\overrightarrow{IC}(-3, -1)$ est un vecteur directeur donc $(IC) : -x + 3y + c = 0$
avec $I \in (IC) : -2 + 12 + c = 0, c = -10$ $(IC) : -x + 3y - 10 = 0$

Équation de (JB) : $\overrightarrow{JB}(3, 5)$ est un vecteur directeur donc $(JB) : 5x - 3y + c = 0$
avec $J \in (JB) : -6 + c = 0, c = 6$ $(JB) : 5x - 3y + 6 = 0$

(b) Le centre de gravité G du triangle ABC est l'intersection des médianes.

$$\begin{cases} -x + 3y - 10 = 0 \\ 5x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 0 & L_1 + L_2 \\ 12y - 44 = 0 & 5L_1 + L_2 \end{cases} \quad G\left(1, \frac{11}{3}\right)$$

2. (a) Médiatrice de $[AB]$: Δ_1 $\overrightarrow{AB}(2, 4)$ est un vecteur normal à Δ_1 donc

$$\Delta_1 : x + 3y + c = 0 \text{ avec } I \in \Delta_1 : 2 + 12 + c = 0, c = -14 \quad \Delta_1 : x + 3y - 14 = 0$$

Médiatrice de $[AC]$: Δ_2 $\overrightarrow{AC}(-2, 2)$ est un vecteur normal à Δ_2 donc

$$\Delta_2 : -x + y + c = 0 \text{ avec } J \in \Delta_2 : c = -2 \quad \Delta_2 : -x + y - 2 = 0$$

(b) Le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est l'intersection des médiatrices

$$\begin{cases} x + 3y - 14 = 0 \\ -x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 16 = 0 & L_1 + L_2 \\ 4x - 8 = 0 & L_1 - 3L_2 \end{cases} \quad \Omega(2, 4)$$

Remarque : Ω et I sont confondus donc le triangle ABC est rectangle.

3. (a) Hauteur relative à $[AB]$: D_1 $\overrightarrow{AB}(2, 4)$ est un vecteur normal à D_1 donc

$$\Delta_1 : x + 3y + c = 0 \text{ avec } C \in D_1 : -1 + 9 + c = 0, c = -8 \quad D_1 : x + 3y - 8 = 0$$

Hauteur relative à $[AC]$: $D_2 \overrightarrow{AB}(-2, 2)$ est un vecteur normal à D_2 donc

$$\Delta_2 : -x + y + c = 0 \text{ avec } B \in D_2 : -3 + 7 + c = 0, c = -4 \quad \boxed{D_2 : -x + y - 4 = 0}$$

(b) L'orthocentre H du triangle ABC est l'intersection des hauteurs

$$\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ -x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 12 = 0 & L_1 + L_2 \\ 4x + 4 = 0 & L_1 - 3L_2 \end{cases} \quad \boxed{H(-1, 3)}$$

Remarque H et C sont confondus.

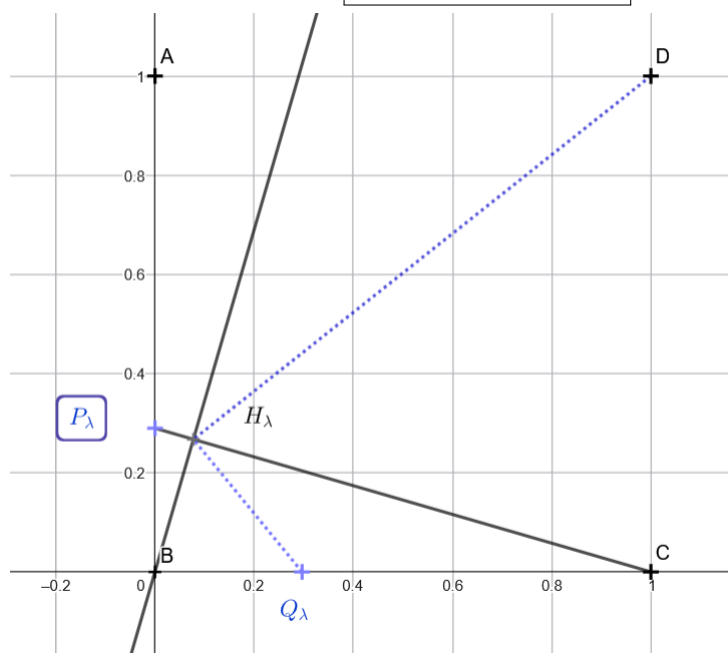
$$4. \overrightarrow{\Omega H}(-3, -1) \quad \overrightarrow{GH}(-2, -\frac{2}{3}) \text{ donc } \overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega H} \text{ et } \boxed{H, G \text{ et } \Omega \text{ sont alignés.}}$$

Exercice 2 Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, on considère les points P_λ sur $[AB]$ et Q_λ sur $[BC]$ tels que $BP_\lambda = BQ_\lambda = \lambda$.

On note H_λ le projeté orthogonal de B sur la droite $(P_\lambda C)$.

On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.

- $B(0, 0), C(1, 0), A(0, 1), D(1, 1), P_\lambda(0, \lambda), Q_\lambda(\lambda, 0)$
- $\overrightarrow{P_\lambda C}(-1, \lambda)$ est un vecteur directeur de $(P_\lambda C)$ donc $(P_\lambda C) : \lambda x + y + c = 0$ avec $C \in (P_\lambda C)$ donc $c = -\lambda$ et $\boxed{(P_\lambda C) : \lambda x + y - \lambda = 0}$
 $\overrightarrow{P_\lambda C}(-1, \lambda)$ est un vecteur normal à $(H_\lambda B)$ donc $(H_\lambda B) : -x + \lambda y + c = 0$ avec $B \in (H_\lambda B)$ donc $c = 0$ et $\boxed{(H_\lambda B) : -x + \lambda y = 0}$



- H_λ est l'intersection des droites $(P_\lambda C)$ et $(H_\lambda B)$

$$\begin{cases} \lambda x + y - \lambda = 0 \\ -x + \lambda y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda y \\ (\lambda^2 + 1)y - \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} \\ y = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \end{cases} \text{ car } \lambda^2 + 1 \neq 0$$

$$\boxed{H_\lambda \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}, \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right)}$$

$$4. \overrightarrow{H_\lambda Q_\lambda} \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}, -\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right)$$

$$\overrightarrow{H_\lambda D} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1} = \frac{1}{\lambda^2 + 1}, 1 - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} = \frac{\lambda^2 + 1 - \lambda}{\lambda^2 + 1} \right)$$

$$\overrightarrow{H_\lambda Q_\lambda} \cdot \overrightarrow{H_\lambda D} = \frac{\lambda^3 + \lambda - \lambda^2}{(\lambda^2 + 1)^2} + \frac{\lambda(\lambda - \lambda^2 - 1)}{(\lambda^2 + 1)^2} = 0$$

Les droites $(H_\lambda Q_\lambda)$ et $(H_\lambda D)$ sont donc perpendiculaires pour tout $\lambda \in]0, 1[$.

Exercice 3 On considère le point $A(-2, 0)$, la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$, le cercle C de centre $\Omega(2, 2)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

1. $\vec{u}(1, 1)$ est un vecteur directeur de D donc $D : -x + y + c = 0$ avec $A \in D$ donc $c = -2$.

Une équation cartésienne de la droite D est $-x + y - 2 = 0$

2. $d(\Omega, D) = \frac{|-2 + 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$ donc

la droite D et le cercle C sont tangents en un point.

3. Une équation cartésienne du cercle C est $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$

4. $M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + y(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 4$

Une équation cartésienne du cercle Γ de diamètre $[A\Omega]$ est $x^2 + y^2 - 2y = 4$

5.
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y = -6 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 10 \\ x^2 + y^2 - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ x^2 + (5 - 2x)^2 - 2(5 - 2x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 5x^2 - 16x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & y = 3 \\ x = \frac{11}{5} & y = \frac{3}{5} \end{cases}$$

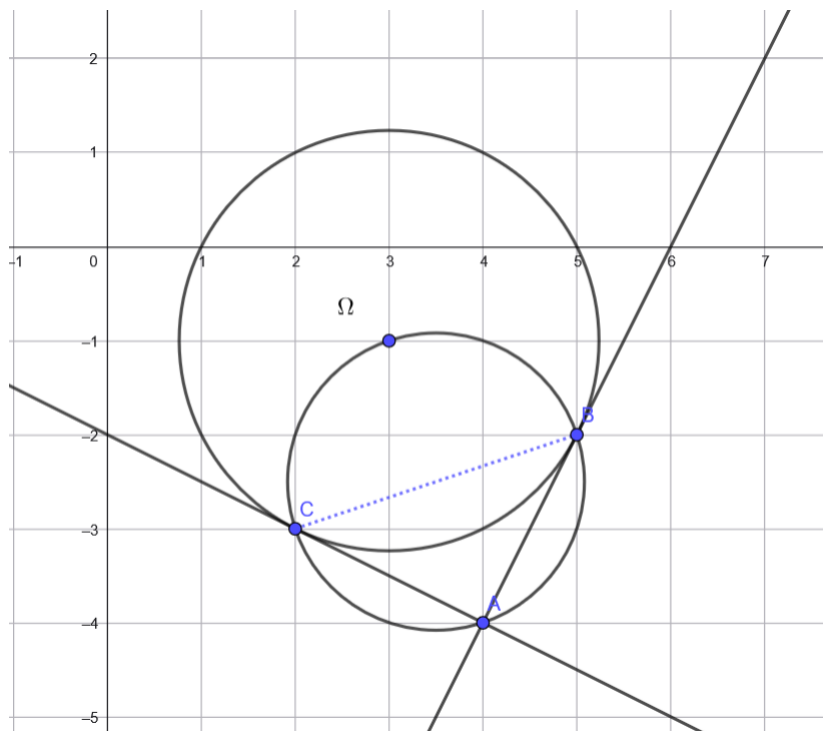
L'intersection des cercles C et Γ est constitué des deux points de coordonnées $(1, 3)$ et $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$

6. La droite (AT) est tangente au cercle C en T ssi $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{\Omega T} = 0$ et $T \in C$ ssi $T \in C \cap \Gamma$.

D'après la question précédente, l'ensemble des points T du cercle C tels que la droite (AT) soit tangente au cercle C en T est constitué des deux points de coordonnées

$(1, 3)$ et $\left(\frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Exercice 4 Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ et $A(4, -4)$. On peut mener par le point A deux tangentes au cercle C . On note B et C les points d'intersection de ces tangentes et de $\mathcal{C}$. Calculer la distance BC .



$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ donc $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(3, -1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

En B et C les tangentes à $\mathcal{C}$ sont orthogonales respectivement à (ΩB) et (ΩC) donc les triangles $AB\Omega$ et $AC\Omega$ sont rectangles respectivement en B et C .

B et C sont alors sur le cercle de diamètre $[A\Omega]$ d'équation

$$(x - 4)(x - 3) + (y + 4)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 7x + 5y + 16 = 0.$$

Il suffit de trouver les points d'intersection de ces deux cercles :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 7x + 5y + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5 \\ -x + 3y + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 + 66y + 121 + y^2 = 6x - 2y - 5 \\ x = 3y + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y + 6 = 0 \\ x = 3y + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\boxed{BC = \sqrt{10}}$$

Exercice 5 L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les quatre points $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$, $C(2, 2, 2)$ et $I(0, 1, -1)$

1. a. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-8, -8, 24)$.

b. $\vec{n}(1, 1, -3)$ est alors un vecteur normal au plan (ABC) qui contient le point A donc

$$\boxed{(ABC) : x + y - 3z + 2 = 0}$$

2. Soit Q le plan d'équation $x + y - 3z + 2 = 0$ et Q' le plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

a. $\vec{n}$ est un vecteur normal à $Q (= (ABC))$ et $\vec{n}'(0, 1, 0)$ est un vecteur normal à Q' .

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, $\boxed{\text{les plans } Q \text{ et } Q' \text{ sont sécants.}}$

$$\text{b. } \Delta = Q \cap Q' \left\{ \begin{array}{l} x = 3z - 2 \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3t - 2 \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{array} \right. \text{ donc}$$

$$\boxed{E(-2, 0, 0) \in Q \cap Q' \text{ et un vecteur directeur de } Q \cap Q' \text{ est } \vec{u}(3, 0, 1)}$$

$$3. S : x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$$

$$4. \text{ On considère les points } J(-2, 0, 0) \text{ et } K(1, 0, 1). \overrightarrow{JK}(3, 0, 1) \text{ et}$$

$$(JK) \left\{ \begin{array}{l} x = 3t - 2 \\ y = 0 \\ z = t, t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad S \cap (JK) \left\{ \begin{array}{l} x = 3t - 2 \\ y = 0, t \in \mathbb{R} \\ z = t \\ x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4 \end{array} \right. .$$

En remplaçant L_1, L_2, L_3 dans L_4 on obtient

$$10t^2 - 10t + 2 = 0 \Leftrightarrow 5t^2 - 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}.$$

La droite (JK) coupe la sphère S en deux point de coordonnées

$$\boxed{\left(-2 + \frac{3(5 + \sqrt{5})}{10}, 0, \frac{5 + \sqrt{5}}{10}\right) \text{ et } \left(-2 + \frac{3(5 - \sqrt{5})}{10}, 0, \frac{5 - \sqrt{5}}{10}\right)}$$

Exercice 6 On considère, dans un repère orthonormé, les points $A(0, 0, 0) B(2, 1, -1)$ et $C(1, 1, 1)$.

$$1. \overrightarrow{AB}(2, 1, -1) \text{ et } \overrightarrow{AC}(1, 1, 1) \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2, -3, 1) \neq \vec{0} \text{ donc}$$

les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$2. \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2, -3, 1) \text{ est un vecteur normal au plan } (ABC) \text{ donc}$$

$$(ABC) : 2x - 3y + z + d = 0 \text{ avec } A \in (ABC) \text{ donc } d = 0 \text{ et } \boxed{(ABC) : 2x - 3y + z = 0}$$

$$3. d(M_k, (ABC)) = \frac{|k|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{|k|}{\sqrt{14}}$$

Le rayon de la sphère de centre $M_k(0, 0, k)$ tangente au plan (ABC) est $\frac{|k|}{\sqrt{14}}$

Il existe deux sphères de rayon 2 parmi celles-ci pour $k = 2\sqrt{14}$ et $k = -2\sqrt{14}$.

$$4. D(x, y, z) \quad \overrightarrow{AD}(x, y, z) \quad \overrightarrow{BD}(x - 2, y - 1, z + 1) \quad \overrightarrow{CD}(x - 1, y - 1, z - 1)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -x + 2z = x + y + z - 2 = 2x + y - z - 2 = 0$$

$\Delta = \{(2z, 2 - 3z, z) | z \in \mathbb{R}\}$ qui est la droite passant par le point de coordonnées $(0, 2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -3, 1)$

$$5. \text{ Il existe un unique point } H \text{ de } \Delta \text{ appartenant au plan } (ABC) \text{ pour } z = \frac{3}{7} \text{ de}$$

$$\text{coordonnées } \boxed{\left(\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)}$$

$H \in (ABC)$ avec $(AH) \perp (BC), (BH) \perp (AC)$ et $(CH) \perp (AB)$ donc

H est l'orthocentre du triangle (ABC) (intersection de ses hauteurs)

$$6. D(2, -1, 1) \quad AD = \sqrt{6} \quad BD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad CD = \sqrt{5}$$

$$D \in \Delta \text{ donc le projeté orthogonal de } D \text{ sur } (ABC) \text{ est le point } H \text{ avec } \boxed{DH = \frac{4\sqrt{14}}{7}}$$

7. DH est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ relativement à la base ABC .

L'aire de ce triangle vaut $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{\sqrt{14}}{2}$ donc le volume du tétraèdre $ABCD$ est $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{14}}{2} \times \frac{4\sqrt{14}}{7} = \frac{4}{3}$ en unités de volume.

8. Un plan perpendiculaire à (ABC) et à (BCD) admet pour vecteur normal $\vec{BC}(1, 0, -2)$ donc a pour équation $x - 2z + d = 0$.

Ce plan est tangent à S si la distance du centre de S de coordonnées $(0, 0, 2\sqrt{14})$ à ce plan est égale au rayon de S ce qui donne $\frac{|-4\sqrt{14} + d|}{\sqrt{5}} = 2$ d'où

$$d = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{14} \text{ ou } d = -2\sqrt{5} + 4\sqrt{14}$$

9. Équation paramétrique de la hauteur issue de A dans le tétraèdre $ABCD$: cette droite est perpendiculaire au plan (BCD) donc $\vec{BC} \wedge \vec{BD}(4, 2, 2) = 2(2, 1, 1)$ en est un vecteur directeur. Cette droite passe par le point A donc admet pour représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 2t \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Équation paramétrique de la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$: cette droite est perpendiculaire au plan (ABC) donc $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(2, -3, 1)$ en est un vecteur directeur. Cette droite passe par le point D donc admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = -1 - 3k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + k \end{cases}$$

Ces droites sont sécantes pour $t = \frac{1}{2}$ et $u = -\frac{1}{2}$ en un point $H'(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Or $\vec{BH'} \cdot \vec{AC} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$ et $\vec{BH'} \cdot \vec{AD} = -2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 0$ donc $(BH') \perp (ACD)$ et H' appartient bien à la hauteur issue de B .

10. La perpendiculaire commune à (AD) et à (BC) admet pour vecteur directeur $\vec{AD} \wedge \vec{BC}(-2, -5, -1)$ ou $\vec{u}(2, 5, 1)$.

Si on note P_1 le plan contenant cette perpendiculaire commune et la droite (AD) il admet comme vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{AD}(6, 0, -12) = 6(1, 0, -2)$ et $A \in P_1$ donc $P_1 : x - 2z = 0$

Si on note P_2 le plan contenant cette perpendiculaire commune et la droite (BC) il admet comme vecteur normal $\vec{u} \wedge \vec{BC}(10, -5, 5) = 5(2, -1, 1)$ et $C \in P_2$ donc $P_2 : 2x - y + z - 2 = 0$

Un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune est donc

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées de H' vérifient ces deux équations donc H' appartient à cette droite.