

# Exercices École Ouverte PTSI

## 1 Polynômes

**Exercice 1** Pour chacun des cas ci-dessous, calculer le quotient  $Q$  et le reste  $R$  de la division euclidienne de  $A$  par  $B$ .

1.  $A = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 1, B = X^2 + X + 1$
2.  $A = 26X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1, B = 2X^3 - X^2 - X + 1$
3.  $A = X^{n+2} + X^{n+1} - X^n, B = X^3 - 2X + 1$  où  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

**Exercice 2** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations

1.  $z^5 = 1 + i$
2.  $z^8 + z^4 + 1 = 0$
3.  $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$
4.  $(z + 1)^3 - (z - 1)^3 = 0$ .

**Exercice 3** Soit  $P = X^4 - 6X^3 + 9X^2 + 9$ .

1. Décomposer  $X^4 - 6X^3 + 9X^2$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .
2. En déduire une décomposition de  $P$  en produit de facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ , puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 4** Soit  $P = (1 + X)^5 - (1 - X)^5$ .

1. Développer le polynôme  $P$  et montrer que 0 est racine de  $P$ .
2. Décomposer  $P$  en irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  puis dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Exercice 5** L'objectif est de déterminer, par analyse-synthèse, l'ensemble des polynômes  $P$  de  $\mathbb{C}[X]$  vérifiant :

$$(E) : P(X) = P'(X)P''(X).$$

1. (Analyse) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul vérifiant l'équation  $(E)$ .
  - (a) Déterminer le degré de  $P$ .
  - (b) Déterminer le coefficient dominant de  $P$ .
  - (c) Justifier que le polynôme  $P'$  admet une racine  $\alpha$  dans  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $P(\alpha) = 0$ .
  - (d) En dérivant chacun des membres de l'égalité  $(E)$ , montrer que  $P''(\alpha) = 0$ .
  - (e) Déduire de tout ce qui précède, la factorisation de  $P$  en irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ .
2. (Synthèse) Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

**Exercice 5** Pour tout entier  $n \geq 2$ , on considère le polynôme  $P_n = (X + 1)^n - 1$ .

1. Déterminer les racines de  $P_n$  dans  $\mathbb{C}$ , puis factoriser  $P_n$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .

2. Montrer qu'il existe un polynôme  $Q_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P_n = XQ_n$ .

On écrira  $Q_n$  sous forme développée et factorisée.

3. En évaluant  $Q_n(0)$  de deux façons différentes, calculer le produit  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ .

**Exercice 6** On cherche à déterminer les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  qui vérifient la relation

$$(E) : P(X^2) = (X^3 + 1)P(X).$$

On note  $j$  le nombre complexe  $e^{\frac{2i\pi}{3}}$

- Démontrer que le polynôme nul ainsi que le polynôme  $X^3 - 1$  sont solutions de  $(E)$ .
- Soit  $P$  un polynôme non nul qui vérifie la relation  $(E)$ .
  - Déterminer le degré de  $P$ .
  - Démontrer que  $P(1) = 0$ , puis que  $P(j) = P(j^2) = 0$ .
- Conclure : quels sont les polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  solutions de  $(E)$  ?

**Exercice 7** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $\sin(n\theta) \neq 0$ .

On considère le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$

- Justifier que  $P = \frac{1}{2i} [(1 + e^{i\theta} X)^n - (1 + e^{-i\theta} X)^n]$
- En déduire les racines du polynôme  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- Montrer que ces racines sont réelles.
- En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

## 2 Géométrie

**Exercice 1** Soient  $A(1; 1)$ ,  $B(3; 7)$  et  $C(-1; 3)$  trois points du plan.

- Déterminer les équations cartésiennes de deux médianes du triangle ABC.
  - Quelles sont les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC ?
- Déterminer les équations cartésiennes de deux médiatrices du triangle ABC.
  - Quelles sont les coordonnées du centre  $\Omega$  du cercle circonscrit au triangle ABC ?
- Déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle ABC.
  - Quelles sont les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC ?
- Vérifier que H, G et  $\Omega$  sont alignés.

**Exercice 2** Soit  $ABCD$  un carré de côté 1. Pour tout réel  $\lambda \in ]0, 1[$ , on considère les points  $P_\lambda$  sur  $[AB]$  et  $Q_\lambda$  sur  $[BC]$  tels que  $BP_\lambda = BQ_\lambda = \lambda$ .  
On note  $H_\lambda$  le projeté orthogonal de B sur la droite  $(P_\lambda C)$ .  
On se place dans le repère orthonormé  $\mathcal{R} = (B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ .

1. Donner les coordonnées des points  $B, C, A, D, P_\lambda, Q_\lambda$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(P_\lambda C)$  puis une équation cartésienne de la droite  $(H_\lambda B)$
3. Calculer les coordonnées de  $H_\lambda$ .
4. En déduire que les droites  $(H_\lambda Q_\lambda)$  et  $(H_\lambda D)$  sont perpendiculaires pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$ .

**Exercice 3** Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère le point  $A(-2, 0)$ , la droite  $D$  passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}(1, 1)$ , le cercle  $C$  de centre  $\Omega(2, 2)$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite  $D$ .
2. La droite  $D$  et le cercle  $C$  sont-ils sécants ?
3. Déterminer une équation cartésienne du cercle  $C$ .
4. Déterminer une équation cartésienne du cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[A\Omega]$ .
5. Déterminer l'intersection des cercles  $C$  et  $\Gamma$ .
6. Quel est l'ensemble des points  $T$  du cercle  $C$  tels que la droite  $(AT)$  soit tangente au cercle  $C$  en  $T$  ?

**Exercice 4** Soit  $\mathcal{C}$  le cercle d'équation cartésienne  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$  et  $A(4, -4)$ .  
On peut mener par le point A deux tangentes au cercle C. On note B et C les points d'intersection de ces tangentes et de  $\mathcal{C}$ . Calculer la distance  $BC$ .

**Exercice 5** L'espace est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les quatre points  $A(-1, 2, 1)$ ,  $B(1, -6, -1)$ ,  $C(2, 2, 2)$  et  $I(0, 1, -1)$

1. **a.** Calculer le produit vectoriel  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ .  
**b.** Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.
2. Soit  $Q$  le plan d'équation  $:x + y - 3z + 2 = 0$  et  $Q'$  le plan de repère  $(O; \vec{i}, \vec{k})$ .  
**a.** Les  $Q$  et  $Q'$  sont-ils sécants ?  
**b.** Donner un point E et un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite d'intersection  $\Delta$  des plans  $Q$  et  $Q'$ .
3. Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.
4. On considère les points  $J(-2, 0, 0)$  et  $K(1, 0, 1)$ .  
Déterminer l'intersection de la sphère S et de la droite  $(JK)$ .

**Exercice 6** On considère, dans un repère orthonormé, les points  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 1, -1)$  et  $C(1, 1, 1)$ .

1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation du plan  $(ABC)$ .
3. Déterminer le rayon de la sphère de centre  $M_k(0, 0, k)$  tangente au plan  $(ABC)$ .  
Combien y a-t-il de sphères de rayon 2 parmi celles-ci ? On note  $S$  celle correspondant à la plus grande valeur de  $k$ .
4. Déterminer l'ensemble des points  $D(x, y, z)$  vérifiant  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  (on en donnera une équation paramétrique).
5. Parmi les points de l'ensemble précédent, combien appartiennent au plan  $(ABC)$  ? Que représentent-ils alors ?
6. On note désormais  $D(2, -1, 1)$ . Déterminer la distance de  $D$  aux trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , ainsi que les coordonnées du projeté orthogonal de  $D$  sur  $(ABC)$ , et la distance de  $D$  à ce dernier.
7. En déduire le volume du tétraèdre  $ABCD$ .
8. Déterminer une équation du plan tangent à  $S$ , perpendiculaire à  $(ABC)$  et à  $(BCD)$ .
9. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de  $A$  et  $D$  (droites passant par le point et perpendiculaires à la face opposée) dans le tétraèdre  $ABCD$ . Montrer que ces droites sont sécantes en un point  $H$  appartenant également à la hauteur issue de  $B$ .
10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'unique droite perpendiculaire simultanément à  $(AD)$  et à  $(BC)$  et vérifier que  $H$  appartient à cette droite.