

Fiche de cours complétée

1 Polynômes

On considère des polynômes A, B, P de $\mathbb{K}_n[X]$.

1) **Forme développée** : $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 X^0$

2) **Division euclidienne de A par B** : $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

3) On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P de **multiplicité** $m \in \mathbb{N}^*$ si $(X - \alpha)^m$ divise P et $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

ssi $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

ssi pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

4) P est dit **scindé** s'il s'écrit comme produit de polynômes de degré 1.

5) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et si α est une racine complexe non réelle de P de multiplicité m , alors $\bar{\alpha}$ aussi.

6) $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **irréductible** si P est non constant et ses seuls diviseurs sont les polynômes constants non nuls et les λP , où $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

7) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

8) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

9) **Formule de Taylor** $\forall a \in \mathbb{K}$, $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$.

2 Géométrie dans le plan

1) Donner les 3 formules permettant de calculer un **produit scalaire** :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = xx' + yy' \quad \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

3) Donner les 2 formules permettant de calculer un **produit mixte** :

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$$

4) Interpréter géométriquement le produit mixte.

$|\vec{u}, \vec{v}|$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

5) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ssi $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$

6) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

7) Définir les **coordonnées polaires** d'un point ou d'un vecteur : $M \neq O$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} OM = r \\ (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. \quad \left(\text{resp.} \left\{ \begin{array}{l} \|\vec{u}\| = r \\ (\vec{i}, \vec{u}) = \theta \quad [2\pi] \end{array} \right. \right)$$

8) Déterminer l'**angle orienté** entre deux vecteurs : On calcule son cosinus et son sinus en calculant leurs normes, leur produit scalaire et leur produit mixte.

9) Déterminer une **équation cartésienne de droite**.

La droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$[\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = \alpha(y - y_A) - \beta(x - x_A) = 0$$

La droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

Une telle droite admet pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et comme vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

La droite D passant par $A(x_A, y_A)$ et de coefficient directeur ou pente m a pour équation

réduite $y = mx + p$. Si $B(x_B, y_B) \in D$ alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{n} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à D .

10) Déterminer une **représentation paramétrique de droite**.

La droite passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

11) Déterminer l'angle entre une droite et l'axe des abscisses. Si $D : y = mx + p$ et $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$ alors $m = \tan \theta$.

- 12) Calculer la **distance d'un point à une droite**. $HM = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
- 13) Déterminer les coordonnées du **projeté orthogonal** d'un point M sur une droite D : On détermine une équation (ou mieux rep par) de la droite passant par M orthogonale à D puis on calcule les coordonnées de l'intersection des deux droites.
- 14) Déterminer une **équation cartésienne de cercle**. $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ si centre et rayon $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$ si de diamètre $[AB]$.
- 15) Déterminer si un **cercle et une droite** sont sécants ou tangents : Si $d(\Omega, D) > R$ alors $\mathcal{C} \cap D = \emptyset$ Si $d(\Omega, D) = R$ alors $\mathcal{C}$ et D sont tangents en un point. Si $d(\Omega, D) < R$ alors $\mathcal{C}$ et D sont sécants en deux points.

3 Géométrie dans l'espace

- 1) Définir le **produit vectoriel** et calculer ses coordonnées : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de norme $\|\vec{n}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ et tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ soit directe.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$$

- 3) Interpréter géométriquement le produit vectoriel : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme porté par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- 3) Définir le **produit mixte** : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = ((\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w})$.

- 3) Interpréter géométriquement le produit mixte.

La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est égale au volume du parallélépipède porté par ces trois vecteurs.

- 4) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** ssi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ssi $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

- 5) $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls **sont coplanaires** ssi il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ ssi $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$

- 6) Définir les **coordonnées cylindriques** d'un point ou d'un vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_\theta + z\vec{k} \quad \left(\text{resp. } \vec{u} = r\vec{u}_\theta + z\vec{k} \right), \quad \text{où } \vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

7) Déterminer une **équation cartésienne de plan**.

Le plan défini par $A(x_A, y_A, z_A)$ et les vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ $[\vec{u}, \vec{u'}, \overrightarrow{AM}] = 0$

Le plan passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

8) Déterminer une **représentation paramétrique de plan** :
$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}, \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

9) Déterminer une **représentation paramétrique de droite** : La droite passant par le point

$A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$
$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

9) Calculer la **distance d'un point à un plan** : $HM = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

10) Déterminer les coordonnées du **projeté orthogonal d'un point sur un plan**. On détermine une représentation paramétrique de la droite passant par M orthogonale à P puis on calcule les coordonnées de l'intersection de P avec cette droite.

11) Calculer la **distance d'un point à une droite**. $d(M, D) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$

12) Déterminer les coordonnées du **projeté orthogonal d'un point sur une droite**. On détermine une équation du plan passant par M orthogonale à D puis on calcule les coordonnées de l'intersection D avec ce plan.

13) Déterminer une **équation cartésienne de sphère**. $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$
Sphère définie par un diamètre La sphère de diamètre $[AB]$ est $\{M / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$.

14) Déterminer si **une sphère et un plan** sont sécants ou tangents. Si $d(\Omega, P) > R$ alors $\mathcal{S} \cap P = \emptyset$ Si $d(\Omega, P) = R$ alors $\mathcal{S}$ et P sont tangents en un point. Si $d(\Omega, P) < R$ alors $\mathcal{S}$ et D sont sécants en un cercle.

15) Déterminer si une **sphère et une droite** sont sécantes ou tangentes. Si $d(\Omega, D) > R$ alors $\mathcal{S} \cap D = \emptyset$ Si $d(\Omega, D) = R$ alors $\mathcal{S}$ et D sont tangentes en un point. Si $d(\Omega, D) < R$ alors $\mathcal{S}$ et D sont sécantes en deux points.