

Correction du devoir maison n° 14

Exercice 1 Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X - 2)^{2n} + (X - 3)^n + 1$ par

1. $(X - 3)(X - 2) : (X - 2)^{2n} + (X - 3)^n + 1 = Q(X - 3)(X - 2) + R$ avec $\deg R < 2$. On pose $R = aX + b$

Pour $X = 2$ on obtient $(-1)^n + 1 = 2a + b$

Pour $X = 3$ on obtient $2 = 3a + b$

D'où $a = 1 - (-1)^n$ et $b = (-1)^n + 1 - 2a = 3(-1)^n - 1$ puis

$$\boxed{R = (1 - (-1)^n)X + 3(-1)^n - 1 = 2 \text{ si } n \text{ est pair et } 2X - 4 \text{ sinon}}$$

2. $(X - 3)^2 : (X - 2)^{2n} + (X - 3)^n + 1 = Q(X - 3)^2 + R (*)$ avec $\deg R < 2$. On pose $R = aX + b$

Pour $X = 3$ on obtient $2 = 3a + b$

En dérivant $(*)$ on obtient $2n(X - 2)^{2n-1} + n(X - 3)^{n-1} = 2(X - 3)Q + (X - 3)^2Q' + a$

Pour $X = 3$ on obtient $2n = a$ puis $b = 2 - 3a = 2 - 6n$ et $\boxed{R = 2nX + 2 - 6n}$

Exercice 2

0. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(z_0) = 0$. En conjuguant cette égalité on obtient $\overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$.

Or $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$ d'après les propriétés algébriques de la conjugaison et car les coefficients de P sont des nombres réels, égaux à leurs conjugués.

$$\boxed{\overline{z_0} \text{ est donc aussi une racine du polynôme } P}$$

Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ donc $j^3 = 1$

$$P(j) = j^8 + 2j^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1$$

$$P(j) = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3(j^2 + j + 1) = 0 \text{ car } j^2 + j + 1 = \frac{j^3 - 1}{j - 1} = 0 \text{ donc}$$

$$\boxed{j \text{ est bien racine de } P.}$$

2. $P(-X) = P(X)$ donc P est pair.

3. On sait que P est divisible par $X - j$ et par la question 0. on en déduit que P est divisible par $X - \bar{j}$ et par la question 2. que P est également divisible par $X + j$ et $X + \bar{j}$. P est alors divisible par le produit

$$(X - j)(X - \bar{j})(X + j)(X + \bar{j}) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = X^4 + X^2 + 1$$

4. $P = (X^4 + X^2 + 1)D = D^2$ en posant la division euclidienne.

5. $\boxed{P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2(X + j)^2(X + \bar{j})^2 \text{ dans } \mathbb{C}[X]}$

$$\boxed{P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2 \text{ dans } \mathbb{R}[X].}$$