

Correction Test n° 14

Sujet A

$$1. F = \frac{X-2}{(X-1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}$$

$$-\frac{1}{2} = a \text{ et } \frac{i-2}{i-1} = bi+c = \frac{(i-2)(-i-1)}{2} = \frac{3+i}{2}$$

donc $\boxed{F = -\frac{1}{2(X-1)} + \frac{X+3}{2(X^2+1)}}$

2. On considère le point $A(1, -2, 1)$ et la droite (D) définie par le système d'équations

$$\text{cartésiennes } \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) (D) est l'intersection du plan $P : x - 2y + z - 1 = 0$ dont un vecteur normal est

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et du plan } P' : x + y - 2z + 2 = 0 \text{ dont un vecteur normal est } \vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Un vecteur directeur de } (D) \text{ est donc } \vec{n} \wedge \vec{n'} = - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ On peut choisir } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteur directeur de (D) . Le point $B(1, 1, 2) \in (D)$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ donc } d(A, (D)) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{AB}\|}{\|\vec{u}\|} = \boxed{\sqrt{\frac{14}{3}}}$$

(b) P est orthogonal à la droite (D) donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à P .

$$P : x + y + z + d = 0 \text{ avec } A \in P \text{ donc } d = 0 \text{ et } \boxed{P : x + y + z = 0}.$$

$$(c) \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation paramétrique de } (D)$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow 4 + 3t = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{3} \text{ donc } \boxed{H \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)}$$

Sujet B

$$1. F = \frac{X-1}{(X-2)(X^2+1)} = \frac{a}{X-2} + \frac{bX+c}{X^2+1}$$

$$\frac{1}{5} = a \text{ et } \frac{i-1}{i-2} = bi+c = \frac{(i-1)(-i-2)}{5} = \frac{3-i}{5}$$

$$\text{donc } \boxed{F = \frac{1}{5(X-2)} + \frac{-X+3}{5(X^2+1)}}$$

2. On considère les points $B(1, 2, 0)$, $D(3, -1, 0)$, $E(1, 1, 4)$, $F(2, 3, 4)$ et $G(5, 2, 4)$.

(a) Donner une équation cartésienne du plan (BEG) .

$$\vec{BE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BG} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BE} \wedge \vec{BG} \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ donc on peut prendre comme vecteur}$$

$$\text{normal au plan } (BEG) \text{ le vecteur } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } (BEG) : -x + 4y + z + d = 0 \text{ avec}$$

$$B \in (BEG) \text{ donc } d = -7 \text{ puis } \boxed{(BEG) : -x + 4y + z - 7 = 0}$$

$$(b) \vec{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ n'est pas colinéaire à } \vec{n} \text{ donc}$$

la droite (FD) n'est pas orthogonale au plan (BEG) .

$$(c) \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation paramétrique de la droite } (FD)$$

$$-x + 4y + z - 7 = 0 \Rightarrow 21t - 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \text{ donc } \boxed{H \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3} \right)}$$

$$(d) d(F, (BEG)) = \frac{|-x_F + 4y_F + z_F - 7|}{\sqrt{1 + 4^2 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{18}} = \boxed{\frac{7}{3\sqrt{2}}}$$