

Correction du devoir maison n° 15

Exercice 1 Pour tout $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, on note $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On considère, pour tout entier naturel $n > 1$, le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. (a) Le terme en X^n s'annule mais celui en X^{n-1} est égal à

$$2 \binom{n}{n-1} X^{n-1} = 2nX^{n-1}.$$

Le polynôme Q_n est donc de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$.

- (b) Q_n ne s'annule pas pour $X=1$ puisque $Q_n(1) = 2^n$ et $Q_n(X) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$

Les solutions de l'équation $Z^n = 1$ sont $e^{2i\alpha_k}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ où $\alpha_k = \frac{k\pi}{n}$

$$\frac{X+1}{X-1} = e^{2i\alpha_k} \Leftrightarrow X = -\frac{1+e^{2i\alpha_k}}{1-e^{2i\alpha_k}} = \frac{\cos(\alpha_k)}{i \sin(\alpha_k)} = -i \cotan \alpha_k$$

En éliminant la valeur $k=0$ pour laquelle $X=1$, on obtient

$$Q_n = 0 \Leftrightarrow X = -i \cotan \alpha_k, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$$

- (c) Les $n-1$ valeurs obtenues à la question précédente sont distinctes car

$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, 0 \leq \frac{k\pi}{n} \leq \pi$. Le polynôme Q_n étant de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2n$, on peut en déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X + i \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)$$

2. On considère le polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k} X^k, n > 1$.

- (a) $Q_{2n+1}(X) = (X+1)^{2n+1} - (X-1)^{2n+1}$

$$Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^{2n+1-k} X^k$$

$$Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k [1 - (-1)^{2n+1-k}]$$

Or $1 - (-1)^{2n+1-k} = 0$ si $2n+1-k$ est pair, c'est-à-dire pour k impair, et vaut 2 sinon. En posant $k = 2j$, on obtient

$$Q_{2n+1}(X) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j} X^{2j} = 2P_n(X^2)$$

- (b) D'après la question précédente, si a est une racine de $Q_{2n+1}(X)$, alors a^2 est une racine de $P_n(X)$

donc $\left(i \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)^2 = -\cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)$ sont racines de P_n pour tout $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

Or le degré de P_n est n et en remarquant que $\cotan(\pi - x) = -\cotan x$, on trouve n

racines simples en prenant $\boxed{-\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

(c) La somme des racines de P_n est, en notant (a_k) les coefficients de P_n ,

$$-\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\frac{\binom{2n+1}{2n-2}}{\binom{2n+1}{2n}} = -\frac{(2n+1)!}{(2n+1)(2n-2)!3!} = -\frac{2n(2n-1)}{3!} = \boxed{-\frac{n(2n-1)}{3}}$$

(d) D'après les deux questions précédentes, $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

3. (a) On pose $g(x) = \sin(x) - x$, on a $g'(x) = \cos(x) - 1$ qui est négative sur $\mathbb{R}$ donc la fonction g est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et vérifie $g(0) = 0$, elle est donc négative sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

De même, si on pose $h(x) = \tan(x) - x$, on a $h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$, donc h est croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et vérifie $h(0) = 0$, h est donc positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

Remarque On peut aussi utiliser la concavité de la fonction sinus, la convexité de la fonction tangente et les tangentes en 0.

(b) Tous les termes de l'encadrement précédent sont positifs, on peut l'élever au carré puis passer à l'inverse : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$0 < \sin x \leq x \leq \tan x \Rightarrow 0 < \sin^2 x \leq x^2 \leq \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{\tan^2 x} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x \text{ d'où}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \cotan^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cotan^2 x}$$

(c) En posant $x = \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on obtient

$$\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq 1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \text{ puis}$$

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

On additionne tous les encadrements pour k variant entre 1 et n , et on utilise bien sûr le résultat de la question 2.(d)

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right) =$$

$$\pi^2 \left(\frac{n}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)}{3(2n+1)^2}\right)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{(2n+1)^2} = 0$ et par le théorème des gendarmes

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

Exercice 1 Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble P_m par son équation cartésienne

$$(4 + m^2)x + (4 - m^2)y - 4mz = m + 8.$$

On note Ω le point de coordonnées $(0; 1; -\frac{1}{4})$ et D la droite passant par Ω et dirigée par $\vec{i}$.

1. $4 + m^2 \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ donc pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'ensemble P_m est un plan.

$$2. \Omega_x(x, 1, -\frac{1}{4}) \quad d(\Omega_x, P_m) = \frac{|(4 + m^2)x + (4 - m^2) + m - m - 8|}{\sqrt{(4 + m^2)^2 + (4 - m^2)^2 + 16m^2}}$$

$$d(\Omega_x, P_m) = \frac{|(4 + m^2)x - 4 - m^2|}{\sqrt{32 + 16m^2 + 2m^4}} = \frac{(4 + m^2)|x - 1|}{\sqrt{2}\sqrt{(m^2 + 4)^2}}. \text{ Or } \sqrt{(m^2 + 4)^2} = m^2 + 4 \text{ car}$$

$$m^2 + 4 > 0 \text{ pour tout } m, \text{ donc } \boxed{\text{la distance entre } \Omega_x \text{ et } P_m \text{ est égale à } \frac{|x - 1|}{\sqrt{2}}}$$

3. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, P_m est tangent à la sphère de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dont le centre appartient à

$$D \text{ssi } d(\Omega_x, P_m) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |x - 1| = 1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0$$

$$S_1 : x^2 + (y - 1)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} \text{ est}$$

$$\boxed{\text{la sphère de centre } \Omega_0(0, 1, -\frac{1}{4}) \text{ et de rayon } \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Exercice 2 On considère le plan P d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$, P' le plan de vecteurs

directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par le point $A(2; 0; 0)$.

$$1. \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc les vecteurs } \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}, \text{ vecteur normal à } P' \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ vecteur}$$

normal à P , ne sont pas colinéaires, les plans P et P' sont donc sécants.

L'intersection D des plan P et P' est alors une droite passant par le point $B(0, 0, 1)$ et

$$\text{dont un vecteur directeur est } \vec{n} \wedge \vec{n}' \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ colinéaire au vecteur } \vec{u}' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ est une représentation paramétrique de } (D)}$$

2. Pour tout réel m , on note P_m l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $(1 + m)x + (2 - m)y + (-1 + 2m)z + 1 - 2m = 0$.

(a) $1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1, 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2, -1 + 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ donc, pour tout réel m , l'ensemble P_m est un plan.

- (b) $-(1+m)t + (2-m)t + (-1+2m)(1+t) + 1 - 2m =$
 $(-m-m+2m-1+2-1)t - 1 + 2m + 1 - 2m = 0$ donc D est incluse dans P_m ,
 pour tout réel m .

- (c) Un vecteur directeur de P_m est alors $\vec{u}' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}_m \begin{pmatrix} 1+m \\ 2-m \\ -1+2m \end{pmatrix} = 0$
 donc $\vec{v}'$ est aussi un vecteur directeur de P_m .

- (d) $P \perp P_m \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}_m = 0$ pour tout m
 $\vec{n} \cdot \vec{n}_m = 6 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ Donc $\boxed{P \perp P_2}$.

3. On considère l'ensemble S des points $M(x; y; z)$ vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y = 0$.

- (a) $S : (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ donc
 $\boxed{S \text{ est la sphère de centre } \Omega(-1, 2, 0) \text{ et de rayon } \sqrt{5}.}$

- (b) $P_{\frac{1}{2}} : x + y = 0$. $d(\Omega, P_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{5}$ donc $C = P_{\frac{1}{2}} \cap S$ est
 $\boxed{\text{un cercle de centre } B \text{ et de rayon } r.}$

B est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $P_{\frac{1}{2}}$ donc l'intersection de la droite

passant par Ω et de vecteur directeur $\vec{n}_{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, normal à $P_{\frac{1}{2}}$, dont une

représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

$$x + y = 0 \Leftrightarrow -1 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ et } \boxed{B(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)}$$

De plus, d'après le théorème de Pythagore, $d(\Omega, P_{\frac{1}{2}})^2 + r^2 = 5$ d'où $r^2 = \frac{9}{2}$, $\boxed{r = \frac{3}{\sqrt{2}}}$

- (c) $OB^2 = \frac{9}{2}$ et $O \in P_{\frac{1}{2}}$ donc $O \in C$

La tangente T au cercle C en O est dans le plan $P_{\frac{1}{2}}$ et est orthogonale au rayon $[OB]$ donc dans le plan passant par O et de vecteur normal $\vec{OB}$ qui a alors pour équation cartésienne $x - y = 0$

Un système d'équation cartésienne de T est $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Une représentation paramétrique de T est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$