

Correction Test n° 15 Sujet A

1.

2. $A = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n \rightarrow \ell \right\}$ Soit $\ell \in \mathbb{R}$ fixé. $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.Si $\ell \neq 0$: A ne contient pas la suite nulle car elle ne converge pas vers ℓ .Dans ce cas, A n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.Si $\ell = 0$: A contient la suite nulle et si $u = (u_n) \in A$, $v = (v_n) \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a : $u_n \rightarrow 0 = \ell$, $v_n \rightarrow 0 = \ell$ donc $u_n + \lambda v_n \rightarrow 0 = \ell$, par opérations sur les limites.Donc $u + \lambda v \in A$ et A est stable par combinaison linéaire. Donc A est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est engendré par

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

4. $P_0 = X^3 + X^2$ $P_1 = X^2 + X$ $P_2 = X + 1$ $P_3 = 1$ $aX^3 + bX^2 + cX + d = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \Leftrightarrow \lambda_0 = a, \lambda_1 = b - a, \lambda_2 = c - b + a$ et $\lambda_3 = d - c + b - a$ (faire le calcul) donc tout vecteur de $\mathbb{R}_3[X]$ s'écrit de manièreunique comme combinaison linéaire de P_0, P_1, P_2, P_3 $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.On peut aussi dire que $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car elle est à degrés échelonnés et le calcul précédent montre que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$

Correction Test n° 15 Sujet B

1.

2. $A = \left\{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(1) = b \right\}$ Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé. $A \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.Si $b \neq 0$: A ne contient pas la fonction nulle par laquelle l'image de 1 est $0 \neq b$. Dans ce cas, A n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.Si $b = 0$: A contient la fonction nulle et si $f, g \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on a :

$$(f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = 0 + \lambda \times 0 = 0 \text{ donc } f + \lambda g \in A,$$

et A est stable par combinaison linéaire. Donc A est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.3. $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+b & c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}); (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est engendré par

$$\left(I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. $P_0 = X^2 + X^3 \quad P_1 = X + X^2 \quad P_2 = 1 + X \quad P_3 = 1$

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \Leftrightarrow \lambda_0 = a, \lambda_1 = b - a, \lambda_2 = c - b + a$$

et $\lambda_3 = d - c + b - a$ (faire le calcul) donc tout vecteur de $\mathbb{R}_3[X]$ s'écrit de manière

unique comme combinaison linéaire de P_0, P_1, P_2, P_3 $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut aussi dire que $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$ car elle est à degrés échelonnés et le calcul précédent montre que $\mathbb{R}_3[X] = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$