

Correction du devoir maison n° 16

Exercice 1 On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, m)$, $u_2 = (1, m, 1)$ et $u_3 = (m, 1, 1)$, $m \in \mathbb{R}$ étant un paramètre.

On note $\mathcal{H}$ la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3) et $H = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.

$$1. [u_1, u_2, u_3] = (u_1 \wedge u_2) \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 1 - m^2 \\ m - 1 \\ m - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -m^3 + 3m - 2 = (m - 1)(-m^2 - m + 2) = (m - 1)(m - 1)(-m - 2)$$

Donc u_1, u_2, u_3 sont coplanaires ssi $m = 1$ ou $m = -2$

$\mathcal{H}$ est libre ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

2. Pour cette question, on suppose que $m = 1$.

(a) Si $m = 1$ alors $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$ d'après la question précédente et $u_1 = u_2 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $H = \text{Vect}(u_1)$

$u_1 = (1, 1, 1)$ est une base de H .

(b) H est une droite donc on peut choisir 2 plans vectoriels quelconques qui la contiennent.

Un système d'équations cartésiennes de H est par exemple $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3. Pour cette question, on suppose que $m = -2$.

(a) De même, d'après la question 1., $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$ donc (u_1, u_2) est une famille génératrice de H avec u_1 et u_2 non colinéaires, donc (u_1, u_2) est une famille libre.

Une base $\mathcal{B}$ de H est (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, 1, -2)$ et $u_2 = (1, -2, 1)$

(b) $u_1 \wedge u_2 = (-3, -3, -3) = -3(1, 1, 1)$, $v = (1, 1, 1)$ est alors un vecteur normal au plan H

Une équation cartésienne de H est $x + y + z = 0$

(c) On peut prendre $v = (1, 1, 1)$, les vecteurs (u_1, u_2, v) ne sont pas coplanaires et $\mathcal{B} \cup \{v\}$ est une base de l'espace $\mathbb{R}^3$ car c'est une famille libre de $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs.

Exercice 2 On considère $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - y + z - t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y\}$.

$$1. (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow x = y - z + t \text{ et } \begin{pmatrix} y - z + t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \boxed{\text{est un sev de } \mathbb{R}^4}$$

$$(x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow x = y \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \boxed{\text{est un sev de } \mathbb{R}^4}$$

$$2. (x, y, z, t) \in F \cap G \Leftrightarrow x = y - z + t \text{ et } x = y \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = t$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y \\ t \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } F \cap G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment

une base de $F \cap G$ et $\dim F \cap G = 2$.