

Correction du Test n° 16

Sujet A

- 1.
2. (a) $u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow 2x - y + z = 0 \Leftrightarrow z = -2x + y \Leftrightarrow u = (x, y, -2x + y, t) = x(1, 0, -2, 0) + y(0, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$ donc
 $F = \text{Vect}((1, 0, -2, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ et on démontre que cette famille est libre donc F est un sev de $\mathbb{R}^4$ de dimension 3.
 $u = (x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow x = 2y = 3z \Leftrightarrow u = (3z, \frac{3z}{2}, z, t) = z(3, \frac{3}{2}, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1)$
donc $G = \text{Vect}((6, 3, 2, 0), (0, 0, 0, 1))$, 2 vecteurs non colinéaires donc
 G est un sev de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
- (b) $\dim F + \dim G = 5 \neq \dim \mathbb{R}^4$ donc F et G ne sont pas supplémentaires dans E .
- (c) D'après la formule de Grassman, $\dim F \cap G = 1$. Or $(0, 0, 0, 1) \in F \cap G$ donc
 $F \cap G = \text{Vect}(0, 0, 0, 1)$
- (d) Un supplémentaire de F est $F' = \text{Vect}((0, 0, 1, 0))$:
en effet, la famille $((1, 0, -2, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^4$
car c'est une famille libre (à démontrer)
Un supplémentaire de G est $G' = \text{Vect}(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$. La justification est la même que pour F .

Correction du Test n° 18

Sujet B

- 1.
2. (a) $u = (x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z L_1 - L_2 \\ y = t L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow u =$
 $(x, y, x, y) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 0, 1)$
 $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ est un sev de $\mathbb{R}^4$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires ils constituent une base de F et $\dim F = 2$.
 $u = (x, y, z, t) \in G \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} x + y + z + t = 0 L_1 + L_2 \\ 3x + y - z - 3t = 0 L_2 - L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z - t \\ 3x + y = z + 3t \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\begin{cases} 2x = 2z + 4t & L_2 - L_1 \\ 2y = -4z - 6t & 3L_1 - L_2 \end{cases} \Leftrightarrow u = (z + t, -2z - 3t, z, t) =$
 $z(1, -2, 1, 0) + t(1, -3, 0, 1)$
 $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 0), (1, -3, 0, 1))$ est un sev de $\mathbb{R}^4$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires ils constituent une base de G et $\dim G = 2$.

- (b) Pour trouver les éléments de $F \cap G$, on résout un système de quatre équations à 4 inconnues dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 6 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \text{ (Gauss Jordan)}$$

Cette matrice est inversible donc le système admet pour unique solution $(0, 0, 0, 0)$,

donc $F \cap G = \{0\}$.

- (c) $\dim F + \dim G = 4$ et $F \cap G = \{0\}$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$