

Fiche de cours complétée Espaces vectoriels

On considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{e_i, 1 \leq i \leq n\}$ une famille de vecteurs de E .

1) Soit G un sous ensemble de E . G est un **sous espace vectoriel de E** si (2 méthodes)

- $G \neq \emptyset$. En particulier $0_E \in G$ et $\forall u, v \in G, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u + \lambda v \in G$
- $G = \text{Vect}(\dots)$ ce qui permet de trouver une base et la dimension de G

2) $\mathcal{F}$ est une **famille libre** de E si pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

3) $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice** de E si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$:

$$\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k.$$

4) $\mathcal{F}$ est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est une famille libre et génératrice de E

i.e tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_n$:

$$\forall u \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, u = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Dans ce cas, on dit que $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées (composantes) de u dans la base $\mathcal{F}$.

5) **Bases canoniques**

- de $\mathbb{K}^n$: $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, où 1 est sa i ème composante.
- de $\mathbb{K}_n[X]$: $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$
- de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, $E_{i,j}$ matrice de coefficients tous nuls sauf celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

6) Le **rang** de $\mathcal{F}$ est défini par : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}\{e_i, 1 \leq i \leq n\})$

On considère F et G deux sev de E .

7) On dit que F et G sont en **somme directe** si $\forall w \in F + G, \exists! (u, v) \in F \times G, w = u + v$.

ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

8) On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si $\forall w \in E, \exists! (u, v) \in F \times G, w = u + v$.

ssi $E = F \oplus G$ c.à.d. $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$

9) **Cas où E est de dimension finie**

- **Formule de Grassmann** $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
- $E = F \oplus G$ ssi $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.